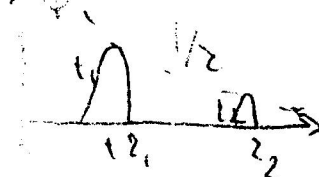


и уравнение имеет вид $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi(z)}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad | \times z$

тогда $\frac{\partial^2(z\psi)}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2(z\psi)}{\partial t^2} = 0$ - есть одномерное волновое уравнение по оси z для функции $\psi = z\psi$, его решение мы знаем, $\psi = f(t - z/c)$, поэтому $\psi = \frac{f(t - z/c)}{z}$ (4)

то. образн. отличие от плоской волны, амплитуда сферической волны уменьшается как $1/z$. Это уменьшение геометрически закономерно, действително, $W \propto E^2 \sim 1/z^2$ и полная площадь сферы $\sim z^2$, так что полная энергия протекающая через любую сферу, одна и та же $z^2 \cdot 1/z^2 \sim 1$

Замечание 1: мы отбросили бесконечно внутри волны $f(t + \frac{z}{c})/z$ как при $z \rightarrow 0 \psi \rightarrow \infty$, та особенность есть следствие того, что однородное волновое уравнение не выполняется при $z \rightarrow 0$, т.е. в центре д. источника ψ .



Этих сферических волн много, мы рассматриваем одну из них. Вспомогательная функция $f(t + \frac{z}{c})/z$ при $z \rightarrow 0$ не имеет смысла, так как волна не существует в центре источника.

Величина $(\frac{\omega}{c}, \vec{k})$ образует 4-х вектор (волновой) $k^\mu = (\frac{\omega}{c}, \vec{k})$

Действительно $k^\mu x_\mu = (\frac{\omega}{c} \cdot ct - \vec{k} \cdot \vec{r} = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}$ - скаляр

$k^\mu k_\mu = \frac{\omega^2}{c^2} - \vec{k}^2 = 0$ т.е. $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{n}$ т.е. вектор $\vec{k}$ направлен в сторону к волне

Эффект Доплера. Пусть ω_0 частота источника в собственной системе отсчета. Пусть наблюдатель движется со скор V

$k^0_{\text{наб.}} = \frac{k^0_{\text{ист.}} - V/k^1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ $k^0_{\text{ист.}} = \frac{\omega_0}{c}$ $\frac{\omega_0}{c} = \frac{\omega - k \cos \alpha V}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ $k = \frac{\omega}{c}$

$\omega_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{\omega}{c} (1 - \frac{V}{c} \cos \alpha)$ $\omega = \omega_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c} \cos \alpha}$

- a) α не близок к $\pi/2$ и $V/c \ll 1$, $\omega \approx \omega_0 (1 + \frac{V}{c} \cos \alpha)$
- b) $\alpha = \pi/2$ $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} \approx \omega_0 (1 - \frac{1}{2} v^2/c^2)$

В вакууме 2. Электромагнитные волны
 в этих пор мы рассматриваем статические поле, создаваемые
 зарядами и токами. Теперь посмотрим, какие же вол-
 ны есть в пустоте, разреде и т.д., в вакууме.

Вот другое уравнение Максвелла

$$\text{div } \vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \rho \quad \text{div } \vec{H} = 0$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

поэтому ищем колебательное решение, т.е. поле имеет ко-
 синусоидальную и в вакууме. Оно г.б. переменным,
 если бы оно было постоянным, то решение статических
 уравнений

$$\varphi = \int \frac{\rho dV}{R} = 0 \quad \text{и} \quad \vec{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j} dV}{R} = 0 \quad \text{т.к. } \rho \text{ и } \vec{j} = 0$$

Для нахождения потенциалов поле в вакууме
 удовлетворяет уравнению Д'Аламбера при $\vec{j} = \rho = 0$

$\square^2 A_i = 0$
 однородное уравнение Д'Аламбера на волновом
 уравнении

В 3-мерном виде $\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$

(1) $\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0$

$\vec{H} = \text{rot } \vec{A}$, действуем rot на (1) $\rightarrow$ т.е. $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}$, то

$\Delta (\text{rot } \vec{A}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\text{rot } \vec{A}) = 0 \quad \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \Delta \vec{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$

Аналогично $\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

$$\Delta (-\nabla \varphi) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (-\nabla \varphi) = 0$$

$$+ \Delta \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$

т.е. волновое уравнение
 для электромагнитного поля
 для векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ и потенциалов φ и $\vec{A}$, все
 эти уравнения

$$\Delta \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \text{ где } \psi(x, y, z, t): \text{ потенциал}$$

Волновое уравнение допускает, кроме тривиального решения $\psi = 0$

Плоские волны

Рассмотрим волну вдоль оси x , $\psi = \psi(x, t)$

Фронт волны есть плоскость $x = x(t)$, поэтому она перпендикулярна плоской. (1) имеет вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

$$\text{Запишем в виде } \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi = 0$$

Введем новые переменные $\xi = t - x/c$, $\eta = t + x/c$

$$\text{или } t = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad x = \frac{c}{2} (\eta - \xi)$$

$$\text{Тогда } \frac{\partial f(x, t)}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{c}{2} \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f - \text{любая}$$

$$\text{В операторном виде } \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi} \right)$$

$$\text{Аналогично } \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right)$$

Поэтому волновое уравнение можно переписать

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad \text{интегрируем по } \xi$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 0 + F(\xi) + \text{const}(\xi) \quad \text{т.е. функция от } \eta = \Gamma$$

слева | справа

$$\text{еще раз интегрируем, по } \eta \quad \psi = f_1(\eta) + f_2(\xi)$$

где f_1 и f_2 - произвольные функции const от η

Итак, общим решением волнового уравнения является

$$\psi(x, t) = f_1(t - x/c) + f_2(t + x/c) \quad (2)$$

Введем орг. числа этого решения. Пусть $f_2 = 0$

$\psi = f_1(t - x/c)$ поле одинаково для координат (x, t)

коэффициент пропорциональности $k = \text{const}$ и

Для $\rho=0$ $\text{div} \vec{E}=0$ (в вакууме) град. при $t=0$ в точке $\vec{r}_0$ значение
дифференциал дает возможность выложить
функцию на катоды: $\psi=0$ и $\text{div} \vec{A}=0$
 $\vec{E} = -\vec{\nabla} \psi + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ $\vec{A} = A \cdot \text{grad} f$
Пусть $f(\vec{r}, t) = f_0(\vec{r}, t) + f_1(\vec{r})$. Подберем
тогда, чтобы $\psi=0$, тогда $\vec{E} = -\frac{1}{c} \dot{\vec{A}}$
 $\text{div} \vec{E}=0 \Rightarrow \text{div} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \vec{A} = 0 \Rightarrow \text{div} \vec{A}$ не
зав. от t , а только от $\vec{r}$. Поэтому
меняя $f_1(\vec{r})$, мы не меняем $\vec{E}$, но
можем подбавить $\text{div} \vec{A} \neq 0$
и в момент t тоже градиент
е. значение ψ_0 за время t
и t со скоростью c .
фотоническая со скор.
калоризно $\psi = f_2(\vec{r} + \vec{r}_0/c)$

и отрицательном направлении
продвижение друг в друга. Это

решение, нужно задатое

Французский и царский условия.

Из однозначности определения потенциалов мы можем
(градиентная инвариантность)

добавить $\vec{a}$ к $\vec{p}$ и $\text{div} \vec{a}$ к $\vec{A}$, так чтобы получилась $\vec{p} = 0$ и $\text{div} \vec{A} = 0$

$$\text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0$$

$\frac{\partial A_x}{\partial t} = \text{const} \sim E_x$ - if $A_x \neq 0$ unperturbed wave would move with E_x .
 $\frac{\partial A_x}{\partial t} = 0$ $A_x = \text{const} = A_1(t - \frac{z}{c}) + A_2(t + \frac{z}{c}) \Rightarrow A_1 = A_2 = 0$

Вдоль оси z волна, $\vec{E}$ не имеет отношения к волне

поэтому положим $A_x = E_x = H_x = 0$ (как говорят Фейнман, кто-то ведь мог забыть конденсатор или магнит фреона с утюжком, где мы ставим точку)

т.е. $A' \perp \vec{n}$, где $\vec{n}$ - ~~вектор~~ в направлении волны $f(t-x/c)$.

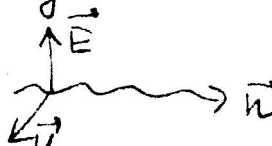
$$\vec{E} = -\text{grad} \varphi = -\frac{1}{c} \frac{\partial A'}{\partial t} = -\frac{1}{c} \vec{A}' \perp \vec{n} \text{ где } A' = \frac{\partial A}{\partial (t-x/c)}$$

$$\vec{H} = \nabla \times \vec{A} = \nabla \times \left(\frac{1}{c} \vec{n} A' \right) =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & A_y & A_z \end{vmatrix} = \vec{i} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) - \vec{j} \frac{\partial A_z}{\partial x} + \vec{k} \frac{\partial A_y}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial (t-x/c)} \left[\vec{j} A_z + \vec{k} A_y \right]$$

т.е. A зависит только от x

$$= -\frac{1}{c} (-\vec{j} A'_z + \vec{k} A'_y) = -\frac{1}{c} \vec{n} \times \vec{A}' = \vec{n} \times \vec{E} \quad (3)$$

т.е. $\vec{H} \perp \vec{E} \perp \vec{n}$  на этом основании эл. волн называют поперечными. Кроме того, из (3) следует что $|\vec{E}| = |\vec{H}|$

Поток энергии волны (вектор Пойнтинга) $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times (\vec{n} \times \vec{E})$
 $= \frac{c}{4\pi} (\vec{n} \vec{E} \cdot \vec{E}) - \vec{E} (\vec{E} \cdot \vec{n}) = \frac{c}{4\pi} E^2 \vec{n} = \frac{c}{4\pi} H^2 \vec{n}$

направлен вдоль волны. Плотность энергии $W = \frac{E^2 + H^2}{8\pi} = \frac{E^2}{4\pi}$, $\vec{S} = W c \vec{n}$, т.е. энергия W движется со скоростью света. Импульс плотности $\vec{S}/c^2 = W/c \vec{n}$. Поток импульса поле определяет тензором напряжений $\overleftrightarrow{T}_{\alpha\beta}$ (6,6). Если волна бежит по x , то единичный тензор энергии $\overleftrightarrow{T}_{\alpha\alpha} = W$. Поток импульса, полагая на $\vec{n}$, скалярное давление электромагнитных волн, приложен к плотности давления равно плотности энергии. Этот факт был проверен экспериментально. Частный случай волны, в которой поле есть гармоническая функция времени для монохроматической волны $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t + \varphi)$, $\overleftrightarrow{T}_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{4\pi} = \frac{1}{2} W$, $\nabla^2 \varphi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$

Другое монохроматическое колебание можно записать в виде $\Psi = \psi$ $\psi = \text{Re}(\psi_0 e^{-i\omega(t - r/c)})$
 где ψ_0 — некая постоянная комплексная величина, ω — частота волны. Длина волны определяется как $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$, $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{n}$ есть волновой вектор



Пусть $\psi_0 = 1$, $\psi = \text{Re} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$

$= \text{Re}(\cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t) + i \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t))$

$= \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})$

Аналогично За счёт того, что начальное условие $\psi_0 \neq 1$ возникает разное направление колебаний:

$\vec{E} = \text{Re}(\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)})$ Пусть $\vec{E}_0 = E_1 + iE_2$, тогда E_1 по оси y , E_2 по z (волна по x), тогда

$E_1 = E_1 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})$

$E_2 = E_2 \sin(\omega t - \vec{k}\vec{r})$; $E_2 = \pm E_2 \sin(\omega t - \vec{k}\vec{r})$

или $\frac{E_y^2}{E_1^2} + \frac{E_z^2}{E_2^2} = 1$ это есть уравнение эллипса.

Вектор $\vec{E}$ вращается в плоскости, перпендикулярной направлению распространения — эллиптически поляризованная волна.

или $E_1 = E_2$, то круговая поляризация;

или $E_1 = 0$, $E_2 \neq 0$ или $E_2 = 0$, $E_1 \neq 0$ — линейно-поляризованная волна по y или z соответственно. Аналогично вращается $\vec{H}$.

Сферические волны

Рассмотрим волну, в которой $\psi(r)$ зависит только от расстояния до центра и не зав. от углов, т.е. сферически симметрична. Концентрические круги на воде от камня — это пример сферической волны в плоскости. Если нет зависимости от углов, то логично

в сферической системе координат, есть $\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r})$
 $\nabla^2 \psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r^2 \psi)$ $\psi(r) = \frac{1}{r} \psi_1(r)$