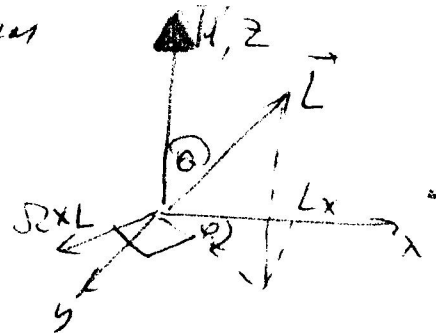


Углы θ и φ постоянны во времени

$$L_{||} = L \cos \theta \quad (\vec{\Omega} \times \vec{L}_{||})_{||} = 0$$

$$\frac{dL_{||}}{dt} = 0 \quad L = \text{const}, \theta = \text{const}.$$

$$L_{\perp} = L \sin \theta \quad L_x = L \sin \theta \cos \varphi$$



$$(\vec{\Omega} \times \vec{L})_x = \Omega L \sin \theta \cos(\varphi + \frac{\pi}{2}) = -\Omega L \sin \theta \sin \varphi \quad |\vec{\Omega} \times \vec{L}|$$

$$\frac{dL_x}{dt} = -\cancel{L \sin \theta} \cancel{\sin \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = +\Omega \cancel{L \sin \theta} \cancel{\sin \varphi} \quad \frac{d\varphi}{dt} = -\Omega \quad \varphi = -\Omega t$$

Лекция 8. Дипольный момент

рассмотрим систему зарядов e_a и $-e_a$



Потенциал в точке R есть

$$\varphi = \sum \frac{e_a}{|\vec{R}_0 - \vec{r}_a|}$$

где $\vec{R}_0$ — радиус-вектор от центра диполя до точки R .

Найдём поле на больших расстояниях, когда $|\vec{R}_0| \gg |\vec{r}_a|$. Разложим $1/|\vec{R}_0 - \vec{r}_a|$ в ряд по степеням $|\vec{r}_a|$.

$$f(\vec{R}_0 - \vec{r}) = f(\vec{R}_0) - \vec{r} \cdot \vec{\nabla} f(\vec{R}_0) + \dots$$

взяв функцию на трёх чертах вычитаем

$$\frac{1}{|\vec{R}_0 - \vec{r}_a|} = \frac{1}{R_0} - \vec{r}_a \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{R_0}, \text{ тогда}$$

$$\varphi = \frac{\sum e_a}{R_0} - \sum e_a \vec{r}_a \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{R_0}, \quad \sum e_a \vec{r}_a = \vec{p} - \text{дипольный момент}$$

$$\vec{\nabla} \frac{1}{R_0} = -\frac{\vec{R}_0}{R_0^3}$$

вектор

$$1) \varphi = \frac{\sum e_a}{R_0} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{R}_0}{R_0^3}$$

1-й член — электростатический потенциал

2-й — дипольный — квадрупольный

Так, для разных направлений $\vec{R}_0$ разные значения.

Если все положительные заряды обозначим e_a^+ и $-e_a^-$

и отрицательные: e_a^-, r_a^- , то

$$\vec{p} = \sum e_a^+ r_a^+ - \sum e_a^- r_a^- = R^+ \sum e_a^+ - R^- \sum e_a^-$$

$$\text{или } R^+ = \frac{\sum e_a^+ r_a^+}{\sum e_a^+}, \quad R^- = \frac{\sum e_a^- r_a^-}{\sum e_a^-} \text{ — центры масс}$$

из и отрицательных зарядов.

Если полный заряд равен нулю, т.е. $\sum e_a^+ = \sum e_a^- = 0$,

то дипольный момент не зависит от выбора центра масс

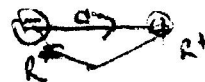
свойство

или

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_2 + \vec{r} \sum e_a$$

или

$$\vec{r}' = 2 \vec{e}_a (\vec{r}'_a = 2 \vec{e}_a (\vec{r}'_a + \vec{c}') = \vec{r}' + \vec{c}' 2 \vec{e}_a$$



или иначе $\vec{J}' = e(\vec{R}^+ - \vec{R}^-)$ и $\varphi = \vec{J} \cdot \vec{R}_0 \frac{R_0}{R_0^3} \sim R_0^{-2}$

Напряжённости поля $\vec{E}' = -\vec{\nabla} \varphi = -(\vec{J} \cdot \vec{\nabla}) \vec{R}_0 \frac{1}{R_0^3} - \vec{J} \cdot \vec{\nabla} \frac{R_0}{R_0^3}$

Введём $\vec{n}$ -единичный вектор вдоль $\vec{R}_0 = R_0 \vec{n}$, тогда

$$\vec{E}' = -\vec{\nabla} \frac{\vec{J} \cdot \vec{R}_0}{R_0^3} = -\frac{1}{R_0^3} \vec{\nabla} (\vec{J} \cdot \vec{R}_0) - (\vec{J} \cdot \vec{R}_0) \vec{\nabla} \frac{1}{R_0^3} =$$

$$\vec{\nabla} (\vec{J} \cdot \vec{R}_0) = (\vec{J} \cdot \vec{\nabla}) \vec{R}_0 + \vec{J} \times \text{rot } \vec{R}_0 \quad \text{см. мат. отст. №1, л. 2.}$$

Пусть $\vec{R}_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $(\vec{J} \cdot \vec{\nabla}) \vec{R}_0 = \left(d_x \frac{\partial}{\partial x} + d_y \frac{\partial}{\partial y} + d_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{pmatrix} = \vec{J}$

$$(\vec{J} \cdot \vec{R}_0) \vec{\nabla} \frac{1}{R_0^3} = -\frac{3}{R_0^4} (\vec{J} \cdot \vec{R}_0) \vec{\nabla} R_0 = -\frac{3(\vec{J} \cdot \vec{n}) \vec{n}}{R_0^3}$$

Итак $\vec{E}' = \frac{3(\vec{J} \cdot \vec{n}) \vec{n} - \vec{J}}{R_0^3}$

(2)

Мультипольные моменты.

Если продолжить разложение φ по степеням $1/R_0$, то

возникают т.е. $\varphi = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} + \dots$, $\varphi^{(n)} \sim 1/R_0^{n+1}$

$\varphi^{(0)}$ определяется суммарным зарядом — то

$\varphi^{(1)}$ — дипольный потенциал — дипольный момент

$\varphi^{(2)}$ — мультипольный потенциал — мультипольный момент

В частности, $\varphi^{(2)}$ — квадрупольный потенциал

$$\varphi^{(2)} = \frac{\partial \alpha \beta}{6} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \frac{1}{R_0}, \quad \partial_{\alpha \beta} = \sum_a e \left(3x_\alpha^{(a)} x_\beta^{(a)} - r_a^2 \delta_{\alpha \beta} \right)$$

квадрупольный момент

$$\varphi^{(2)} = \frac{\partial_{\alpha \beta} n_\alpha n_\beta}{2 R_0^3} \sim R_0^{-3}$$

~~Для непрерывных систем: $\vec{J} = \int \rho(\vec{r}) \vec{r}' dV$~~

взаимодействие зарядов со внешним полем

Пусть $\varphi(r)$ - потенциал медленно меняющейся электростатической поле, потенциальная энергия канонического заряда q_a $\varphi_a(z_a)$, а весь потенциал

$$U = \sum_a q_a \varphi(z_a)$$

Если поле квазигомогенное, можно разложить по степеням z_a

$$\varphi(z_a) \approx \varphi(0) + \vec{z}_a \cdot \vec{\nabla} \varphi|_{r=0} + \frac{1}{2} \vec{z}_a \cdot \vec{\nabla} \vec{\nabla} \varphi|_{r=0} \cdot \vec{z}_a + \dots$$

$$U = U^{(0)} + U^{(1)} + U^{(2)} + \dots$$

Здесь $U^{(0)} = \sum_a q_a \varphi(0) = \varphi(0) \sum_a q_a$ - как будто все заряды находятся в одной точке (в центре масс)

$$U^{(1)} = \sum_a q_a \vec{z}_a \cdot \vec{\nabla} \varphi(0) = -\vec{d} \cdot \vec{E}_0, \quad \vec{E}_0 - \text{поле в центре масс}$$

Сила $\vec{F} = -\vec{\nabla} U = -\vec{\nabla} \varphi(0) \sum_a q_a + \vec{\nabla} (\vec{d} \cdot \vec{E}_0) = \sum_a q_a \vec{z}_a + \vec{\nabla} (\vec{d} \cdot \vec{E}_0)$
 $\vec{\nabla} (\vec{d} \cdot \vec{E}_0) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{d}) \vec{E}_0 + \vec{d} \times \vec{\nabla} \times \vec{E}_0$

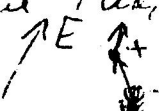
Эта сила будет смещать заряды. Если же заряды нуль то

1) дипольная система $\vec{F} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{d}) \vec{E}_0 \sim \frac{\partial E_0}{\partial x}$
 2) нейтральная система $\vec{F} \ll K$
 момент сил $\vec{K} = \sum_a \vec{z}_a \times q_a \vec{E}_0 = \vec{d} \times \vec{E}_0 \sim \vec{E}_0$

Если поле квазигомогенно, то $\frac{\partial E_0}{\partial x} \ll E_0$, поэтому разбегаться

система будет сдвигаться (для нейтральной системы)

Та система стремится повернуться так, чтобы $\vec{K} = 0$ или $\vec{d} \parallel \vec{E}_0$

То ориентироваться по полю. 

Рассмотрим две нейтральных системы с дип. моментами

$\vec{d}_1$ и $\vec{d}_2$ на большом расстоянии по сравнению с их размерами

тогда по силе в поле другой системы и взаимодействии

$$U_{12} = \frac{\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2}{r^3} - 3(\vec{d}_1 \cdot \vec{n})(\vec{d}_2 \cdot \vec{n}), \quad \vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$$

отсюда диполь-дипольное взаимодействие

Магнитный момент

Рассмотрим систему стационарно движущихся зарядов. найдем поле на больших расстояниях, усредненное по времени.

из 1.7
$$\vec{A} = \frac{1}{c} \sum \frac{e_a \vec{v}_a}{|\vec{R}_0 - \vec{z}_a|} = \frac{1}{c R_0} \sum e_a \vec{v}_a - \frac{1}{c} \sum e_a \vec{v}_a (\vec{z}_a \cdot \vec{v} \frac{1}{R_0})$$

1-й член $= \frac{d}{dt} \sum e \vec{r}_a = 0$ — среднее от производной величины конечно.
(здесь мы сгруппировали, $\vec{r}$ -координаты)
т.е. после усреднения величина не меняется

Так же как в 1.7.

Итак,
$$\vec{A} = \frac{1}{c R_0^3} \sum e_a \vec{v}_a (\vec{r}_a \cdot \vec{R}_0)$$
 преобразуем данное так. $\vec{v} = \frac{1}{c} \frac{d\vec{r}}{dt}$, то

$$\frac{1}{2c} \sum e (\vec{z} \cdot \vec{R}_0) \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{2c} \sum e (\vec{v} \cdot \vec{R}_0) \vec{r} + \frac{1}{2} \sum e (\vec{z} \cdot \vec{R}_0) \vec{v} \quad (\vec{R}_0 = \text{const})$$

или
$$\sum e (\vec{z} \cdot \vec{R}_0) \vec{v} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum e (\vec{z} \cdot \vec{R}_0) \vec{r} + \frac{1}{2} \sum e [(\vec{z} \cdot \vec{R}_0) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{R}_0) \vec{z}]$$

после усреднения
$$\vec{A} = \frac{1}{2c R_0^3} \sum e [(\vec{v} \cdot \vec{R}_0) \vec{z} - (\vec{z} \cdot \vec{R}_0) \vec{v}]$$

выражение в скобках похоже на двойное векторное произведение

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$\vec{R}_0 \times (\vec{v} \times \vec{z}) = (\vec{z} \cdot \vec{v}) \vec{R}_0 - (\vec{v} \cdot \vec{R}_0) \vec{z}$$

 $\vec{a} = \vec{R}_0, \vec{b} = \vec{v}, \vec{c} = \vec{z}$

Введем вектор $\vec{M} = \frac{1}{2c} \sum e \vec{z}_a \times \vec{v}_a$ — магнитный момент системы

Тогда
$$\vec{A} = \frac{\vec{M} \times \vec{R}_0}{R_0^3} = \vec{v} \frac{1}{R_0} \times \vec{M} \quad (4)$$

Сравним с ~~потенциалом~~ электростат. полем $\vec{E} = \frac{e \vec{R}_0}{R_0^3}$
сравним с дипольным потенциалом $\varphi^{(1)} = \frac{\vec{d} \cdot \vec{R}_0}{R_0^3}$

Теперь можно найти поле $\vec{H} = \text{rot } \vec{A}$, получим аналогично как при вычислении $\vec{E}$ от диполя, найдем

$$\vec{H} = [\text{grad}(\vec{M} \cdot \vec{r}) - \vec{M}] / R_0^3$$

$$\vec{H} = \frac{1}{R_0^3} [\vec{r}(\vec{M} \cdot \vec{r}) - \vec{M}]$$
 (5)

Если система такова, что отношение заряда к массе e/m одинаково

то
$$\vec{M} = \frac{e}{2mc} \sum m \vec{z} \times \vec{v} = \frac{e}{2mc} \sum \vec{z} \times \vec{p}$$
, но $\sum \vec{z} \times \vec{p} = \vec{L}$ — механический момент импульса (орбитальный)

т.е.
$$\vec{M} = \frac{e}{2mc} \vec{L} \quad (6)$$

Формы сил

Рассмотрим систему зарядов во внешнем электромагнитном поле. Сила, действующая на заряд q Лоренца $\vec{F} = \sum \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{H} = \frac{1}{c} \sum e \vec{v} \times \vec{H} = \dots$

Эта сила не зависит от скорости (не зависит от $\vec{v}$), т.е. $\vec{F}$ - консервативна

Рассмотрим момент сил

$\vec{K} = \sum \frac{e}{c} \vec{r} \times (\vec{v} \times \vec{H}) \neq 0$. т.е., как $\vec{v}$ для электрона, нейтральных атомов, поле не имеет действия, а разворачивает их.

Вычислим момент сил, раскрытая двойное векторное произведение

$$\vec{K} = \sum \frac{e}{c} [\vec{r} (\vec{v} \cdot \vec{H}) - \vec{H} (\vec{r} \cdot \vec{v})] = \sum \frac{e}{c} [\vec{r} (\vec{v} \cdot \vec{H}) - \vec{H} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} r^2]$$

$$\vec{K} = \sum \frac{e}{c} \vec{r} (\vec{v} \cdot \vec{H}) \quad \text{так же как при вычислении } \vec{F}$$

$$\text{или введя } (\vec{L}) = \frac{1}{2c} \sum e [\vec{r} (\vec{v} \cdot \vec{H}) - \vec{H} (\vec{r} \cdot \vec{v})] = \vec{M} \times \vec{H}$$

Средний момент сил обращается в нуль, так как $\vec{H}$ постоянно и

средний момент импульса

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{K} = \vec{M} \times \vec{H} = \frac{e}{2mc} \vec{L} \times \vec{H} = -\vec{\Omega} \times \vec{L} \quad (\vec{F})$$

где $\vec{\Omega} = \frac{e\vec{H}}{2mc}$ есть ларморовская частота.

Это уравнение показывает, что орбитальный момент

(вместе с тем и магнитный) в поле $\vec{H}$ вращается

с угловой скоростью $-\vec{\Omega}$ вокруг направления поля,

сохраняя при этом свою абсолютную величину и угол

с осью поля (т.е. не вращаясь,

$$\angle \vec{M}, \vec{H} = \text{const} \quad \text{вектор } \vec{M} \text{ вращается}$$