

Лекция 4 Потенциальное электромагнитное поле

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi\rho \quad (2) \quad \text{div } \vec{H} = 0$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0 \quad \text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + 4\pi\vec{j}$$

первый, где потенциалы поля уравнения для $\vec{E}$ и $\vec{H}$ являются; во-вторых заряды определяют только электр. поле $\vec{E}$, которое безвихревое, а ток определяет вихревое поле $\vec{H}$, для которого нет зарядов

Рассмотрим электр. поле $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$. Из уравнения Лапласа следует $\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho$

и уравнение макс. ур-ния Пуассона. В отсутствие зарядов (вакуум) оно переходит в уравнение Лапласа

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad \nabla^2 \equiv \Delta \text{ - лапласиан, } \Delta \varphi = 0$$

Поле точечного заряда

Из соображений симметрии следует

$\vec{E} \parallel \vec{R}$ - радиус-вектор

$|\vec{E}| \propto \frac{1}{R^2}$ (тобы найти век $\vec{E}$)

Компьютеризация $\text{div } \vec{E} \cdot dV = 4\pi \int \rho dV = \oint \vec{E} \cdot d\vec{f} \quad \vec{E} \parallel d\vec{f}$

или $4\pi e = E \cdot \oint d\vec{f} = E \cdot 4\pi R^2$ но сфера R E на сферах равна

таким образом поле $\varphi = \frac{e}{R} \quad \nabla \frac{1}{R} = \vec{e}_R \frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{R} = -\frac{\vec{R}}{R^3} \quad \frac{e}{R^2} \quad \vec{E} = \frac{e}{R^2} \vec{R}$

на сферическом заряде $\vec{E} = \frac{\rho dV}{R(z)}$, где R - расстояние до элемента dV

Поле равномерно-распределенного заряда

Заряд e равномерно распределен по сфер. оболочке радиуса R , а где $R' < R$

$\vec{E} = \frac{e}{R^2} \vec{R}$ для $R' < R$ $\vec{E} = 0$ для $R' > R$

$$\vec{E} = \frac{e}{R^2} \vec{R} \quad \varphi = \frac{e}{R}$$

$$R' < R \quad R' > R$$

и т.д.

Уравнение преобразования Лоренца (1.3, (2)) с $A' = 0$

$$\varphi = \varphi' \sqrt{1 - (v/c)^2} = \frac{e^2}{R' \sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad \varphi = \frac{\varphi' + \frac{v}{c} A'}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

или x, y, z

Согласно преобр. Лоренца $x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, y' = y, z' = z$

$$R'^2 = \frac{(x - vt)^2}{(1 - (v/c)^2)^2} + y^2 + z^2 \quad \text{подставляем в } \varphi \text{ и получаем}$$

$$\varphi = \frac{e}{\sqrt{\frac{(x - vt)^2 + (1 - (v/c)^2)(y^2 + z^2)}{1 - (v/c)^2}}} \cdot \sqrt{1 - (v/c)^2} = \frac{e}{R^*}$$

$$\text{где } R^{*2} = (x - vt)^2 + (1 - (v/c)^2)(y^2 + z^2) \rightarrow R^2 \text{ при } v=0 \text{ переход к покоящемуся телу}$$

Двиющийся заряд создаёт также и вектор-потенциал в системе K . Действительно, из (3.2) следует

$$A_x = \frac{v}{c} \varphi, A_y = 0, A_z = 0, \quad \vec{A} = (v, 0, 0) \text{ у нас}$$

$$\text{то в произвольном случае } \vec{A} = \varphi \vec{v} / c = \frac{e}{c} \frac{\vec{v}}{R^*}$$

Найдём теперь поле $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в системе K' $H = 0$,

$$\vec{E}' = \frac{e \vec{R}'}{R'^3}. \quad \text{Используя преобразования Лоренца получим}$$

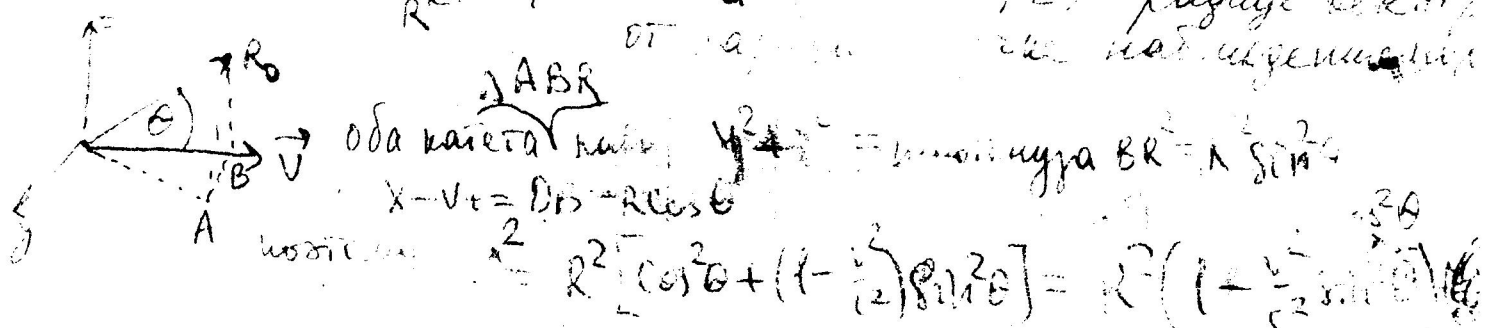
полюса, что в системе K

$$E_x = E'_x = \frac{e x'}{R'^3}, E_y = \frac{E'_y}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{e y'}{R'^3 \sqrt{1 - (v/c)^2}}, E_z = \frac{E'_z}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{e z'}{R'^3 \sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

Теперь выразим R', x', y', z' через x, y, z . $R' = R^* / \sqrt{1 - (v/c)^2}$

$$E_x = \frac{e (x - vt) v^2}{R^{*3}}, E_y = \frac{e y v^2}{R^{*3}}, E_z = \frac{e z v^2}{R^{*3}} \quad \text{обозначим } v = \sqrt{1 - (v/c)^2} \text{ так}$$

$$\vec{E} = (1 - (v/c)^2) \frac{e \vec{R}}{R^3}, \quad \vec{R} = (x - vt, y, z) \text{ - радиус-вектор от центра заряда к наблюдателю}$$



полюс где E направлена

$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{e\vec{R}_0}{R_0^3} \frac{1 - (v/c)^2}{(1 - (v/c)^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}$$

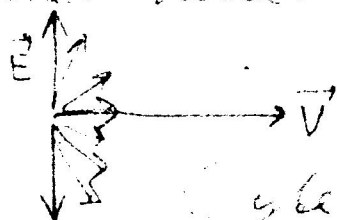
и в направлении, параллельном движению

$$E_{||} = \frac{e}{R^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

перпендикулярном направлению $\theta = \pi/2$

$$E_{\perp} = \frac{e}{R^2} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

т.е. $E_{\perp} > E_{||}$, тем больше отклонение от $\vec{v} = \vec{v}_0$ тем сильнее поле.



Как зависит поле от скорости?

С увеличением v $E_{||}$ уменьшается.

а $E_{\perp}$ увеличивается, т.е. поле

увеличивается в том же направлении с увеличением скорости.

и значения в (6) близки к нулю в пределе $\theta \rightarrow \pi/2$. Здесь

$$\Delta \theta \sim \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

Магнитное поле в системе K

$$H_x = 0, H_y = -\frac{v}{c} \frac{E_z}{\gamma} = -\frac{v_x}{c} E_z, H_z = \frac{v}{c} \frac{E_y}{\gamma} = \frac{v_x}{c} E_y$$

$$\vec{H} = \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{E}$$

при $v \rightarrow 0$

$$\vec{H} = \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{E}$$

$$\text{из (6)} \quad \vec{H} = \frac{e}{R^3} \vec{R} \times \vec{v}$$

т.е. $|\vec{H}| \ll |\vec{E}|$ в пределе $v \rightarrow 0$

Полн

то - ~~предел~~

Анализ магнитного поля.

Из (1) мы знаем, что поле H создается токами. Зная, что ток, создающий бесконечно прямое движение зарядов, мы уже рассмотрели. Рассмотрим теперь движение зарядов, совершающих периодическое движение, при этом токи имеют отношение к магнитному полю. Рассмотрим движение по замкнутому траектории (по кругу). Вектор $E(t)$, по сути, мы интересуемся средними по времени характеристиками (или H), то есть не зависит от t и будут постоянными. Итак, уредним уравнение Максвелла

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} dt = \frac{\vec{E}(T) - \vec{E}(0)}{T} \text{ — минимально конген при } T \rightarrow \infty = 0$$

— значащими $\rightarrow \infty$

Введем $\vec{A}$ так, что $\vec{H} = \text{rot } \vec{A}$. Уравнение для $\vec{A}$ есть статический предел уравнения Даламбера $\Delta \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}$

то уравнение полностью эквивалентно уравнению Пуассона вместо ρ входит A , а вместо ϵ — j/c .

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} dV'$$

$\vec{H} = \text{rot } \vec{A} = \frac{1}{c} \int \text{rot} \left[\vec{j} \frac{1}{R} \right] dV$. Операцию rot берем по поверхности, или точки над полем, поэтому $\vec{j}$ можно считать постоянной при этом

$$\text{rot} \left[\vec{j} \frac{1}{R} \right] = \frac{1}{R} \text{rot } \vec{j} + \text{grad} \frac{1}{R} \times \vec{j} = -\frac{\vec{R}}{R^3} \times \vec{j}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j} \times \vec{R}}{R^3} dV \quad (9)$$

это есть закон Био-Савара

Проверим его простейший случай ток созданный одним зарядом

$$\vec{j} = e \vec{v} \text{ тогда } \vec{H} = \frac{e}{c} \frac{\vec{v} \times \vec{R}}{R^3} \text{ — совпадает с (2): Б.К.}$$

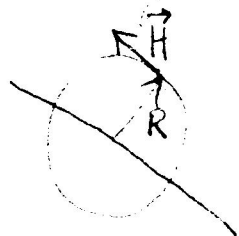
впередит суж
закон Био-Савара по

и

Задача есть симметрия (цилиндрическая, напр.) то удобно использовать закон Ампера. (5.5 при $\frac{\partial E}{\partial t} = 0$)

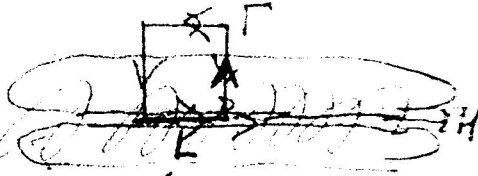
Задать его по Памоллюю: $\oint \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \int \vec{j} d\vec{f}$

Рассмотрим а) прямой провод. В силу цилиндрической симметрии задаем $H = H(R)$



$$\oint \vec{H} d\vec{l} = H \cdot 2\pi R, \quad \int \vec{j} d\vec{f} = j$$

Тогда $H \cdot 2\pi R = \frac{4\pi}{c} j$ $H = \frac{2}{c} \frac{j}{R}$

Соленоид  бесконечной длины так что всё поле внутри его и постоянно

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = HL = Nj \cdot \frac{4\pi}{c} \text{ где } N - \text{число витков на длине } L$$

$$n = \frac{N}{L} - \text{плотность витков (на единицу длины)}$$

Тогда $H = \frac{4\pi}{c} nj$

Итак, результатом наших рассуждений является утверждение, что постоянное магнитное поле создаётся током. Как же быть тогда с постоянным магнитом (напр, железо)? Не поле есть, без возможности к цепи с током? Раньше, да, но сейчас, наши дела, предполагаем, что есть магнетизм обусловлен внутренними токами, возникающими при вращении электронов по орбите. Однако тогда поле, создаётся это (эффект Ван Леева), магнитный эффект таких токов равен нулю (они все компенсируются) и проходящие магнетизм берётся — из атомов ядра.

прислать Л.Б. замечание о векторе Койтмана статического вектора
 конформности - цилиндрич. координ. в полярном смысле.
 В.Б. Значительно

Эт. о.с.т.у. Оператор Тамильтона в криволинейных координатах

$ds^2 = g_{ik} x^i x^k$. Рассм. диагон. метрику $g_{ik} = g_i^2 \delta_{ik}$

$ds^2 = g_1^2 x_1^2 + g_2^2 x_2^2 + g_3^2 x_3^2$

цилиндрическая система $\begin{matrix} g_1 = 1 & g_2 = r & g_3 = 1 \\ x_1 = z & x_2 = \varphi & x_3 = z \end{matrix}$

Цилиндрическая $\begin{matrix} g_1 = 1 & g_2 = R & g_3 = R \sin \theta \\ x_1 = R & x_2 = \theta & x_3 = \varphi \end{matrix}$

$\vec{\nabla} f = \left\{ \frac{1}{g_1} \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{1}{g_2} \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{1}{g_3} \frac{\partial f}{\partial x_3} \right\} = \text{grad } f$

$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (g_2 g_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (g_3 g_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (g_1 g_2 A_3) \right]$

$\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)_1 = \frac{1}{g_2 g_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_2} (g_3 A_3) - \frac{\partial}{\partial x_3} (g_2 A_2) \right]$ остальные - циклически

$\Delta f = \nabla^2 f = \text{div grad } f = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{g_2 g_3}{g_1} \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{g_3 g_1}{g_2} \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{g_1 g_2}{g_3} \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) \right]$