$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\left[-F_{\alpha\kappa}F^{\kappa\beta} + \frac{1}{4}g^{\alpha\beta}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right] = \frac{1}{4\pi}\left[-F^{\alpha 0}F^{\beta}{}_{0} - F^{\alpha\gamma}F^{\beta}{}_{\gamma} - \frac{1}{4}\delta_{\alpha\beta}2(H^2-E^2)\right]$$

$$+F^{\alpha\gamma}F^{\beta\gamma} \qquad \gamma\,\alpha,\beta = -F^{\alpha\gamma}F^{\gamma\beta} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[-E_\alpha E_\beta + H_\alpha H_\beta + H^2\delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}H^2\delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}E^2\delta_{\alpha\beta}\right] \qquad \begin{pmatrix} 0 & -H_z & H_y \\ H_z & 0 & -H_x \\ -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -H_z & H_y \\ H_z & 0 & -H_x \\ -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[-E_\alpha E_\beta - H_\alpha H_\beta + \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}(E^2+H^2)\right]$$

$$= -\begin{pmatrix} -H_z^2 - H_y^2, & H_x H_y, & H_x H_z \\ H_x H_y, & -H_z^2 - H_x^2, & H_y H_z \\ H_x H_z, & H_y H_z, & -H_x^2 - H_y^2 \end{pmatrix} =$$

$$= -\left[-H^2\delta_{\alpha\beta} + H_\alpha H_\beta\right] = -H_\alpha H_\beta + H^2\delta_{\alpha\beta}$$

Вывод тензора напряжений

$$T^{\mu\nu} =$$

$$T^{00} = \frac{1}{4\pi}\left(-F^{0}\right.$$

$$T^{0i} = \frac{1}{4\pi}\left(-F^{0\rho}\right.$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{S}$$

Что дают

$$P^{\mu} = \frac{1}{c}($$

тогда T

$$T^{ij} = \sigma^{ij}$$

$$\frac{\partial T^{i\nu}}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial T^{i0}}{\partial x^{0}}$$

Тензор энергии – импульса   Лекция 6

Рассмотрим произвольное поле, определённое ф-цией $\eta(\vec{r},t)$, действие для которой есть

$$S=\int \mathcal{L}\left(\eta, \frac{\partial\eta}{\partial x^i}\right) dV dt = \frac{1}{c}\int \mathcal{L}\, d\Omega$$

В общем случае $\mathcal{L}$ зависит от $\vec{r}, t$. Здесь только однородный случай, нет зав. от x^μ

Уравнение Лагранжа для поле (см. Л1) есть

$$\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{d\eta}{dt}\right)} + \sum_{k=1}^{3}\frac{d}{dx_k}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\eta}{\partial x_k}\right)}\right] - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta}=0$$

объединим временные и пространственные переменные

$$1)\quad \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\eta}{\partial x^i}\right)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta}=0$$

$\mathcal{L}$ есть функция η и производных $\frac{\partial\eta}{\partial x^i}$, поэтому дифф сложную функцию

$$2)\quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^i} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x^i} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\eta}{\partial x^k}\right)}\frac{\partial\left(\frac{\partial\eta}{\partial x^k}\right)}{\partial x^i}$$

именно здесь работает однородность пр-ва-времени ибо нет зав. от x^μ в $\mathcal{L}$

но $\frac{\partial\left(\frac{\partial\eta}{\partial x^k}\right)}{\partial x^i} = \frac{\partial^2\eta}{\partial x^k\partial x^i} = \frac{\partial\left(\frac{\partial\eta}{\partial x^i}\right)}{\partial x^k}$

~~поэ~~ используя (1):

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^k}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\eta}{\partial x^k}\right)}\right]\frac{\partial\eta}{\partial x^i} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\eta}{\partial x^k}\right)}\frac{\partial\left(\frac{\partial\eta}{\partial x^i}\right)}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k}\left[\frac{\partial\eta}{\partial x^i}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\eta}{\partial x^k}\right)}\right]$$

левую часть представим $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^i} = \delta_i^k\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^k}$ и запишем (2) в виде

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left[\delta_i^k\mathcal{L} - \frac{\partial\eta}{\partial x^i}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\eta}{\partial x^k}\right)}\right]=0$$

Выражение в скобках наз. тензор энергии – импульса поля

$$-T_i^k \qquad T^{ik} = -g^{ik}\mathcal{L} + \frac{\partial\eta}{\partial x_i}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial\eta/\partial x^k\right)}$$

если ... , т.е. есть $\eta = \{\eta_1, \eta_2, \dots \eta_l\}$

$$T_{i}^{k} = -\delta_{i}^{k} \mathcal{L} + \sum_{r=1}^{l} \frac{\partial \eta_r}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \eta_r}{\partial x_k}\right)}$$

Из (2) получим выражение

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x_k} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = 0 \qquad \frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} = 0$$

Сравним его с уравнением непрерывности $\frac{\partial j^k}{\partial x^k} = 0$

следствием которого является сохранение заряда. В общем случае, из равенства нулю 4-х дивергенции вектора $\frac{\partial A^k}{\partial x^k} = 0$ следует сохранение интеграла

$$\int A^k dS_k$$

за по гиперповерхности S, включающей в себе всё трехмерное пространство. Аналогично и для тензора, из равенства $\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0$ следует сохранение (но теперь уже не скаляра, т.к. индекс i остается), а) вектора $P_i = const \int T_i^k dS_k$ или $P^i = const \int T^{ik} dS_k$

Этот вектор по размерности похож на 4-х импульс и перейдет в него, если мы выберем const так, чтобы

$P_0 = \frac{1}{c} \times$ энергию $= \frac{\mathcal{E}}{c}$

$$P_0 = const \int T_0^k dS_k = const \int_{x^0 = const} T_0^0 dV = const \int T_{00} dV$$

но $T_{00} = -\mathcal{L} + \frac{\partial \eta}{c\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \eta}{c\partial t}\right)}$ или $+T_{00} = \dot{\eta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} - \mathcal{L} = \mathcal{H}$ — плотность функции Гамильтона

поэтому $+\int T_{00} dV$ есть полная энергия системы $= \mathcal{E}$

отсюда $const = +1/c$ и $P_i = +\frac{1}{c}\int T_i^k dS_k$, $P^i = +\frac{1}{c}\int T^{ik} dS_k$ (

Заметим, что определение T_i^k не однозначно, можно добавить $\frac{\partial}{\partial x^l}\psi^{ikl}$, где ψ^{ikl} про... ...тисим...
...ный по k и l, $\psi^{ikl} = -\psi^{ilk}$ ...

...к (3) добавляется $\frac{\partial^2 \psi^{ike}_{ike}}{\partial x^k_k \partial x_e}=0$ т.к. можно переставить местами к и e и выражение меняет знак, $a=a$

В частности, можно выбрать ψ_{ike} так, чтобы сделать T_{ik} симметричным, $T_{ik}=T_{ki}$

Итак, если в (4) интегрировать по гиперплоскости $x_4^0=\mathrm{const}$, то
$$P_4^i=+\frac{1}{c}\int T^{i0}\,dV=(P^0,\vec{P})$$

Здесь $(P_1,P_2,P_3)=\vec{P}$ – вектор импульса, а $P_4^0=\frac{1}{c}\mathcal{E}$,

поэтому $+\frac{1}{c}T^{\alpha 0}$ $(\alpha=1,2,3)$ есть плотность импульса, $=\frac{1}{c}T_{\alpha 0}$

а $T_{00}=W$ плотность энергии.

Каков физ. смысл остальных компонент T_{ik}?

Для ответа на этот вопрос напишем закон сохранения (3) в трёхмерном виде
$$\frac{1}{c}\frac{\partial T^{00}}{\partial t}+\frac{\partial T^{0\alpha}}{\partial x^\alpha}=0,\qquad \frac{1}{c}\frac{\partial T^{\alpha 0}}{\partial t}+\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}=0$$

Проинтегрируем уравнение по объёму V. Из первого
$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int T^{00}\,dV+\int\frac{\partial}{\partial x^\alpha}T^{0\alpha}\,dV=0$$
$\int\frac{\partial}{\partial x^\alpha}T^{0\alpha}\,dV = \int \operatorname{div} T^{0\alpha} = \oint T^{0\alpha}\,df_\alpha$ по теореме Гаусса

поэтому $\frac{\partial}{\partial t}\int(+T^{00})\,dV=-c\oint T^{0\alpha}\,df_\alpha$ сравним $\frac{\partial W}{\partial t}=-\operatorname{div}\vec{S}$

энергия в объёме V — ~~...~~ поток энергии через границу объема V;

слева – скорость изменения энергии, а $c(T^{01},T^{02},T^{03})\equiv\vec{S}$

есть плотность потока энергии

Следствие сравним $T_{0\alpha}=T_{\alpha 0}$ тогда $\underline{S_\alpha=p_\alpha\cdot c^2}$

из второго $\frac{\partial}{\partial t}\int\left(+\frac{1}{c}T^{\alpha 0}\right)dV = -\oint T^{\alpha\beta} df_\beta$

слева изменение импульса в объеме V в единицу врем., справа поэтому $\oint T^{\alpha\beta} df_\beta$ есть количество импульса, ... текающее в един. времени, а $T^{\alpha\beta}$ есть плотность пот... импульса. Заметим, что для скалярной величины — энергии плотность потока есть вектор; то для вект... ной величины — плотности импульса — плотность пото... тензор (компонента $T^{\alpha\beta}$ есть количество α-ой компо... ненты импульса, протекающей через единицу поверхности перпендикулярную X_β-оси)

Тензор энергии-импульса электромагнитного поля

Для электром. поля $\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{ik}F^{ik}$ поэтому

$$T_i^k = +\frac{\partial A_l}{\partial x^i}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial A_l}{\partial x_k}\right)} - \delta_i^k \mathcal{L}$$

Чтобы вычислить производную от $\mathcal{L}$, найдём вариацию

$$\delta\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi}\cdot 2F_{ik}\,\delta F^{ik} = -\frac{1}{8\pi}F_{ik}\left(\delta\frac{\partial A^k}{\partial x_i} - \delta\frac{\partial A^i}{\partial x_k}\right)$$

Второе слагаемое $+\frac{1}{8\pi}F_{ik}\,\delta\frac{\partial A^i}{\partial x_k} = \frac{1}{8\pi}F_{ki}\,\delta\frac{\partial A^k}{\partial x_i} = -\frac{1}{8\pi}F_{ik}\,\delta\frac{\partial A^k}{\partial x_i}$ равно первому

$i \rightleftarrows k$

итак $\delta\mathcal{L} = -\frac{1}{4\pi}F_{kl}\,\delta\frac{\partial A^l}{\partial x_k} = -\frac{1}{4\pi}F^{kl}\delta\frac{\partial A_l}{\partial x^k}$ или $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial A_l}{\partial x_k}\right)} = -\frac{1}{4\pi}F^{kl}$

окончательно

$$T_i^k = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial A_l}{\partial x^i}F^{kl} + \frac{1}{16\pi}\delta_i^k F_{lm}F^{lm} \quad \text{или} \quad T^{ik} = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial A^l}{\partial x_i}F^k{}_l + \frac{1}{16\pi}g^{ik}F_{lm}F^{lm}$$

это выражение не симметрично ———. прибав. $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial A^i}{\partial x_l}F^k{}_l$

$$-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial A}{\partial x_i}-\frac{\partial A}{\partial x_l}\right)F^k_l = -\frac{1}{4\pi}F^{il}F^k_l$$

... получаем симметризованный тензор энергии – импульса

$$T^{ik} = \frac{1}{4\pi}\left(-F^{il}F^{k}_{l} + \frac{1}{4}g^{ik}F_{lm}F^{lm}\right)$$

...димся, что действительно T^{00} есть плотность энергии, $T^{0\alpha}$ – ~~плотность импульса~~ вектор Пойнтинга

$$T^{00} = \frac{1}{4\pi}\left(-F^{0l}F^{0}_{l} + \frac{1}{4}F_{lm}F^{lm}\right) = \frac{1}{4\pi}\left(F_{01}^2 + F_{02}^2 + F_{03}^2 + F_{04}^2 + \frac{1}{4}2(H^2-E^2)\right) =$$

$$\frac{1}{4\pi}\left(E_x^2+E_y^2+E_z^2+\frac{1}{2}H^2-\frac{1}{2}E^2\right) = +\frac{1}{8\pi}\left(H^2+E^2\right) = +W \quad \text{O.K.}$$

...алогично $T^{0\alpha}$. Пространственные компоненты образуют ...хмерный тензор $\sigma_{xx} = \frac{1}{8\pi}\left(E_y^2+E_z^2-E_x^2+H_y^2+H_z^2-H_x^2\right)$, $T_{xy} = -\frac{1}{4\pi}\left(E_xE_y+H_xH_y\right)$

$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\left\{-E_\alpha E_\beta - H_\alpha H_\beta + \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\left(E^2+H^2\right)\right\}$ – максвелловский ... ... тензор напряжений – плотность потока вектора импульса

...и кроме поля в объёме V есть заряды, то полный ...ный тензор энергии – импульса есть сумма

$$T_{ik} = T_{ik}^{(f)} + T_{ik}^{(p)}; \quad T_p^{ik} = \mu c u^i u^k \frac{ds}{dt}, \quad \mu = \sum_a m_a \delta(\vec r - \vec r_a) - \text{плотн. масс}$$

Закон сохранения энергии и импульса есть

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(T_{ik}^{(f)} + T_{ik}^{(p)}\right) = 0$$

...к тензор момента импульса M^{ik} определяется обычным ...азом

$$M_{ik} = \int (x_i dP_k - x_k dP_i) = -\frac{1}{c}\int (x_i T_{kl} - x_k T_{il})\, dS_l$$

...н сохранения ...

это не успел

Поскольку закон сохранения (7) энергии-импульса получ... нами из условия обращения в нуль вариации дей... при варьировании координат, т.е. замене $x_\mu \to x_\mu + \delta x_\mu$, ... мы приходим к выводу, что сохранение энергии-имп... обусловлено инвариантностью действия относит... преобразований четырёхмерных трансляций. Ана... в механике сохранение импульса есть следствие инвариа... относ. трёхмерных трансляций, а энергии — относительно с... во времени, т.е. следствие однородности пространства и времени. В механике был ещё закон сохранения момента импульса, св... ный с изотропностью 3-х мерного пространства. Рассмотрим к чему приводит требование инвариантности лагранжиан относительно вращений в 4-х-мерном пр-ве-времени (изотро... пость его). ~~Оказывается, в этом случае~~ сохраняющейся велич... будет антисимметричный тензор 2^го^ ранга

$$M^{ik} = +\frac{1}{c}\int \mathcal{M}^{ikl}\, dS_l, \quad \frac{\partial}{\partial x_l}\mathcal{M}^{ikl} = 0.$$

$$\mathcal{M}^{ikl} = \underbrace{x^i_{\ell} T^{kl} - x^k_{\ell} T^{il}}_{M^0_{\mu ik}} - \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial A^\mu_\ell}{\partial x_\ell}\right)} Y^{\mu kl}$$

где тензор $Y^{\mu kl}$ описыв... изменение потенциала A^μ_ℓ при вращениях $\delta A^\mu_\ell = Y^{\mu kl}\,\delta\omega_{kl}$, ω_{ik} — на... пов...

Здесь 1^ый^ и 2^ой^ члены можно привести к виду $x^i_i P^k_k - x^k_k P^i_i = M$, т.е. это есть орбитальный момент количества движения. Полный момент = орбитальному плюс добавка

$$S_{\mu ik} = -\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial A_\ell}{\partial x_\mu}\right)} Y_{\ell ik}$$

, которая называется собственным моментом количества движения, или спином.

В частности, для скалярного поля, описываемого одной функцией φ, $\delta\varphi = 0$ при вращениях, т.е. $Y_{ik} = 0$ и $S_{\mu ik} = 0$, т.е. скаляр... ... ... спином.