Лекция 5 Различные формы уравнений Максвелла.

1) ... [illegible] форма, дифференц. вид

2) Уравнение М. в ковариантном (4-х мерном) виде:

Одно уравнение мы уже знаем, вместо второй пары входит (4.9) $\frac{\partial F^{ik}}{\partial x_k} = -\frac{4\pi}{c} j^i$; $F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}$

Вместо первой имеем

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = 0 \quad \text{или} \quad e^{iklm} \frac{\partial F_{lm}}{\partial x^k} = 0 - \frac{4 \text{ ур-ия}}{i=0,1,2,3}$$

Проверим для $i=0$ 0123, в перестановках $(123) \to \operatorname{div} H = 0$ | $i=1$ $-\frac{1}{c}\frac{\partial H_x}{\partial t} = (\operatorname{rot} E)_x$

В справедливости последнего легко убедиться, подставляя

$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}$ и учитывая (4.7) и (4.8) (первую пару

Мат. ~~Векторные интеграл.~~ Теорема Гаусса и Стокса:

Определения а) поток вектора через поверхность $\int \vec{A} d\vec{f}$

2) Интегральный вид. б) циркуляция вектора по замкнутому контуру $\oint \vec{A} d\vec{l}$

По теореме Гаусса $\int \operatorname{div} \vec{H} dV = \oint \vec{H} d\vec{f}$. Применяя к $\operatorname{div} H = 0$

$\left(V \quad \oint d\vec{f} \quad d\vec{l} \right.$ получим $\oint \vec{H} d\vec{f} = 0$ - поток магнитного поля через всякую замкнутую поверхность равен нулю

По теореме Стокса $\int \operatorname{rot} \vec{E} \cdot d\vec{f} = \oint \vec{E} d\vec{l}$, применим к (4.7)

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{H} \cdot d\vec{f}$. Циркуляцию электрического поля называют также электродвижущей силой в данном контуре

т.е. Э.Д.С. ~~равна~~ пропорциональна изменению потока магнитного поля через ~~площадь~~ поверхность, границей которой является $d\vec{f}$

Применяя теорему к (4.11), получим

$$\int \operatorname{div} E\, dV = 4\pi \int \rho\, dV = \oint \vec{E}\, d\vec{f}$$

т.о. **Теорема Гаусса**:
полный заряд $\int \rho\, dV = \frac{1}{4\pi} \oint \vec{E} \cdot d\vec{f}$ равен потоку электрического поля через замыкающую объём V поверхность.

По теореме Стокса из (4.10)

$$\int \operatorname{rot} \vec{H}\, d\vec{f} = +\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{E} \cdot d\vec{f} + \frac{4\pi}{c} \int \vec{j} \cdot d\vec{f} = \oint \vec{H} d\vec{l}$$ или

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \int \left(\vec{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{f}$$ — ~~закон~~ **закон Ампера**

| если $j_{см}=0$ $\operatorname{div} \operatorname{rot} H = 0$ но $\operatorname{div} j \neq 0$ противоречие. Максвелл $-\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} j_{см} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} E = 0$ $\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}$ ...

Величина $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j}_{смещения}$. Т.О. Циркуляция магнитного поля по некоторому контуру равна потоку полного тока (~~ист~~ проводимости + смещения) через поверхность, ограничивающую контур.

$\operatorname{rot} H = \frac{4\pi}{c}(j + j_{см})$, $\operatorname{div}(j + j_{см}) = \operatorname{div} \operatorname{rot} H = 0 \Rightarrow$ поле полного тока линии не имеют, линии либо замкнуты, либо на бесконечность

Ток смещения не является истинным током в том смысле что не связан с реальным перемещением зарядов, однако магнитные явления с непостоянными токами описываются только полным током. Смысл полного тока в том, что в точках, где истинный ток терпит разрыв (например, на обкладках конденсатора) и происходит накопление зарядов, но и ток непрерывен и равен скорости изменения электрического поля, создаваемого накапливаемыми зарядами. Необходимость введения тока смещения, т.о., связана с уравнением непрерывности. Ток смещения **не** выделяет джоулева тепла. Итак полная эквив. в магнитном силе и противоположность в электр. Физ.смысл: пусть $j=0$, $\operatorname{rot} E = -\frac{\partial H}{c \partial t}$, $\operatorname{rot} H = \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t}$ эквив.

3) Уравнение Даламбера. Вводя напряжённости E и H, мы приблизились к технически измеряемым величинам и к исторически возникшим законам электромагнетизма, однако удалились от общей теории поля. Сейчас мы выведем полевые уравнения, т.е. уравнения для потенциалов

Воспользуемся (2.6) $E = -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \partial A / \partial t$ и подставим в (4.11)

$$4\pi \rho = \operatorname{div} E = \vec{\nabla} \cdot \left(-\vec{\nabla} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = -\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

Далее подставим выражения для $\vec{E}$ и $\vec{H}$ из $\vec{A}$, φ в (4.10):

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

Как вычислить $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{A}$? Это есть двойное векторное произведение, из векторной алгебры известно

$$\vec{b}\times(\vec{b}\times\vec{a}) = \vec{b}(\vec{b}\cdot\vec{a}) - (\vec{b}\cdot\vec{b})\vec{a}$$, поэтому

$$a\times(b\times c) = b(a\cdot c) - c(a\cdot b)$$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} = \vec{\nabla}(\mathrm{div}\,\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$$ и мы получаем

$$\nabla(\mathrm{div}\,\vec{A}) - \nabla^2\vec{A} + \frac{1}{c}\vec{\nabla}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

Поскольку вектор-потенциал определён неоднозначно, мы можем наложить дополнительное условие на $(\vec{A},\varphi)$; это называется условием калибровки.

В частности, калибровка Лоренца

$$\mathrm{div}\,\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$$

приводит к тому, что 1-ый и 3-ий члены уничтожаются

~~тогда~~ уравнения разделяются

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} \qquad \Delta\vec{A} = i\Delta A_x + j\Delta A_y + k\Delta A_z$$

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho$$

Оператор $\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \equiv \Box$ — оператор Д'Аламбера

Используя его, уравнения (7) запишем в виде

$$\Box\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}, \quad \Box\varphi = -4\pi\rho \quad \times i$$

в 4-х виде $\Box = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ $\quad \Box(\underbrace{i\varphi}_{A_4}) = -4\pi\underbrace{i\rho c}_{j_4}\cdot\frac{1}{c}$

ур-ние Д'Аламбера в 4-х виде

$$\Box A^i = -\frac{4\pi}{c}j^i$$

уравнения (7), (8) ... новую, потенциальную форму ... найдя потенциалы, найдём ... значения ... других потен...

... удобны

Вектор Пойнтинга

$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H}$ Чтобы понять какова его роль, сделаем следующее: возьмём ур-ние $\operatorname{rot} E = \ldots$, умножим на H, потом $\operatorname{rot} H = \ldots$ умножим на E и сложим

$$E \operatorname{rot} H = \frac{E}{c}\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} E j$$
$$H \operatorname{rot} E = -\frac{H}{c}\frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\frac{1}{c}\left(\vec{E}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{H}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right) = -\frac{4\pi}{c}\vec{E}\vec{j} - \left(\vec{H}\operatorname{rot}\vec{E} - \vec{E}\operatorname{rot}\vec{H}\right)$$

$\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}(E^2+H^2)$; из векторной алгебры $b\operatorname{rot} a - a \operatorname{rot} b = \operatorname{div} a \times b$

поэтому правая часть $= -\frac{4\pi}{c}\vec{j}\vec{E} - \operatorname{div}\vec{E}\times\vec{H}$, т.о. окончательно через вектор Пойнтинга — остановились здесь end 1.5

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{E^2+H^2}{8\pi}\right) = -\vec{j}\vec{E} - \operatorname{div}\vec{S} \qquad (9)$$

Рассмотрим а) тока нет $j=0$, тогда

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{E^2+H^2}{8\pi}\right) = -\operatorname{div}\vec{S} \qquad (10)$$

это есть уравнение непрерывности, ~~в котором~~ выражающее локальный закон сохранения величины $(E^2+H^2)/8\pi$, которая оказывается, есть плотность энергии поля

$$W = \frac{E^2+H^2}{8\pi} \left(\text{сравни с лагранжианом } \frac{E^2-H^2}{8\pi}\right)$$

а вектор $\vec{S}$ есть вектор потока энергии. Физ. смысл (10) заключается в том, что энергия в данной точке может измениться, только перетекая в другую либо уносится током

Чтобы убедиться, что W есть плотность энергии, запишем (9) в интегральном виде, с помощью теоремы Гаусса

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \frac{E^2+H^2}{8\pi} dV = -\int_V j\cdot E dV - \oint \vec{S} d\vec{f}$$

! Сюда не входят токи снаружи

Если V — всё пространство, то $E(\infty) = H(\infty) = 0$, $\vec{S} = 0$ $\frac{\partial W}{\partial t} = -\int \vec{j}\vec{E} dV$

$\int \vec{j}\vec{E} dV = \sum e\vec{v}\vec{E}$, $e\vec{E} = \vec{F}$ — сила, $\vec{F}\cdot\vec{v}$ — мощность $= \frac{d}{dt}\mathcal{E}_{кин}$, поэтому

$$\frac{d}{dt}\left\{\int W dV + \sum \mathcal{E}_{кин}\right\}=0 \qquad (11)$$

т.е. для замкнутой системы поле + частицы ~~энерги~~ величина в скобках сохраняется, 2^ой^ член есть кинетических энергия всех частиц, первый — энергия поля, а W — плотность энергии

Если рассмотреть конечный объём V, то из (9)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int W dV + \sum \mathcal{E}_{кин}\right\} = -\oint \vec{S}\, d\vec{f} \qquad (12)$$

т.е. изменение полной энергии поле + частицы внутри объёма V обусловлено ~~из~~ протеканием энергии через границу объёма. При этом мы предполагаем, что на поверхности в данный момент времени нет заряженных частиц. Иначе в правой части (12) должен быть поток энергии, переносимый частицами.

Ф-ла (12) наз. теоремой Пойнтинга.

(*) Ур-ние Д'Аламбера в 4-х виде. Максвелл: $\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i$, $F^{ik} = \frac{\partial A^k}{\partial x_i} - \frac{\partial A^i}{\partial x_k}$

$\frac{\partial^2 A^k}{\partial x_i \partial x^k} - \frac{\partial^2 A^i}{\partial x_k \partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i$. Условие Лоренца $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial A^k}{\partial x^k} = 0$

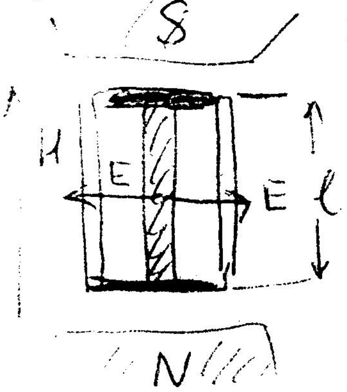
$$\Box = -\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x^k} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \Box A^i = -\frac{4\pi}{c} j^i$$

go to L.7

Согласно теор. Пойнтинга, энергия электромагн. поля ~~локализована~~ распределена в пр-ве. В проводнике, по которому циркулирует ток, происходит превращение электромагнитной энергии в тепло, локализована эта энергия преимущественно во внешнем окружающем проводник пространстве и поступает внутрь через поверхность. Особенно характерен случай быстропеременных полей, когда их энергия не успевает проникнуть внутрь слоев и превращается в тепло на поверхности — скин-эффект.

Статическое поле. В этом случае $\vec{E} \neq 0$, $\vec{H} \neq 0$, то м.б. $S \neq 0$ … то не перетекает? Ведь ничего не движется

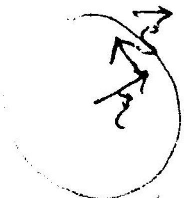
Рассмотрим ~~бесконечный~~ цилиндрический конденсатор (Тамм §104) в однородном магнитном поле. Кроме поля $\vec{H}$, есть радиальное



электрич. поле $\vec{E} = \frac{2e\vec{r}}{lr^2}$ (из симметрии $\vec{E} = \alpha\vec{r}$)

внутри обкладок конденсатора $\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{H} =$

$$= \frac{ce}{2\pi r^2 l}\vec{r}\times\vec{H} \neq 0$$



вектор $\vec{S}$ имеет линии (концентрические окружности), перпендикулярные оси конденсатора. Т.о. существует беспрерывная циркуляция энергии по замкнутым путям в статическом эл. ~~поле нет энергии. проверенных свойства~~ Можно ли это проверить? Мы знаем, что плотность импульса $p = S/c^2$, значит есть момент кол-ва движения $K = \int \vec{p}\times\vec{R}\,dV$. Если разрядить конденсатор (например, направив поток радиоактивных частиц), то $E \to 0$, p и $K \to 0$, чтобы удовлетворить сохранению момента импульса, конденсатор должен начать вращаться. Опыт этот тонкий, т.к. энергия поля невелика (подобно измерению светового давления). Однако в квантовой физике подобные эффекты наблюдаются и важны.