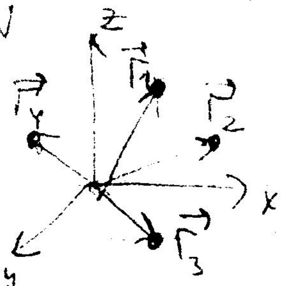
... 4. 4-х вектор тока

В классической электродинамике считается, ... непрерывно. В теории поля ... мелкими размерами ... пренебрегают, поэтому удобно ввести плотность заряда ρ:

def $de = \rho\, dV$ есть заряд в объёме dV; $\rho = \rho(\vec r, t) = \sum_a e_a \delta(\vec r - \vec r_a(t))$ — скалярная величина.

$\int_V \rho\, dV$ = сумме всех зарядов в $V = \sum_a \int e_a \delta(\vec r - \vec r_a)\, dV$.



<u>Математическое отступление 2</u> Свойства дельта-функции $\delta(x)$

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases} \quad \text{так что} \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x) = 1$$

можно представить как предел $\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon/\pi}{x^2 + \varepsilon^2}$

Свойства: а) $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\delta(x-a)\, dx = f(a)$, если $x_0 < a < x_1$
$= 0$ в противном случае.

б) $\delta(\vec r) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$

в) $\delta(-x) = \delta(x)$, $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$

г) $\delta[\varphi(x)] = \sum_i \frac{1}{|\varphi'(a_i)|}\delta(x - a_i)$, где $\varphi(a_i) = 0$, $\varphi'(a_i) \neq 0$

end

$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2}$

итак

$$de = \rho\, dV \to de\, dx^i = \rho\, dV dx^i = \rho\, dV dt \frac{dx^i}{dt}.$$

но $dV dt = \frac{1}{c} dV dx^0 = +\frac{1}{c} d\Omega$ — скаляр; de — скаляр, dx^i 4-х вектор

итак, слева 4-х вектор → справа также 4-х вектор

т.е.

(1) $\rho \frac{dx^i}{dt} \equiv j^i$ — 4-х вектор тока

уже ... $d\vec r = \vec v$, ... $j = \rho\vec v$ — плотность

$j^0 = \rho c \frac{d}{dt}(ct) = c\rho \qquad j^i = (c\rho, \vec j)$ плотность тока.

Используя понятие 4-х вектора тока, можно более ... представить S_{f-p} при переходе от дискретного суммирования в (3.8) к непрерывному распределению заряда, $S_{f-p} = -\frac{1}{c}\int\rho A_i dx^i dV$. Докажем

т.к. $\rho = \sum_a e_a \delta(\vec r - \vec r_a)$, подставим:

$$S_{f-p} = -\frac{1}{c}\sum_a e_a \int A_i dx^i \int \delta(x-x_a)dx\int\delta(y-y_a)dy\int\delta(z-z_a)dz = -\sum_a \frac{e_a}{c}\int A_i dx^i \quad \text{ч.т.д.}$$

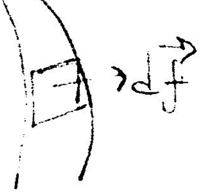
преобразуем $S_{f-p} = -\frac{1}{c}\int\rho\frac{dx^i}{dt}dt\,A_i dV = -\frac{1}{c^2}\int\left(\rho\frac{dx^i}{dt}\right)A_i d\Omega = -\frac{1}{c^2}\int j^i A_i d\Omega$

(2)

Уравнение непрерывности

(dV) заряд de в объеме dV $\int\rho dV$. Как он может меняться со временем. Вычислим $\partial_t\int\rho dV$

поверхность $d\vec f$ (элемент поверхности, ограничивающей dV)



по нормали и наружу. Через этот элемент за единицу времени проходит $\rho\vec v d\vec f$, через всю площадь ...

Если заряд выходит, то $\vec v\cdot d\vec f > 0$, иначе < 0.

Если заряд выходит, то $\frac{\partial}{\partial t}\int\rho dV < 0$, поэтому

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\rho dV = -\oint\rho\vec v d\vec f$$

(3)

...есть уравнение непрерывности, выражающее закон сохранения заряда. Его можно переписать в виде

4) $\frac{\partial}{\partial t}\int \rho dV = -\oint \vec{j} d\vec{f}$

...изменение заряда связано только с током т.е. притоком или оттоком зарядов через поверхность. Уравнения (3, 4) выражают сохранение заряда в интегральной форме. Рассмотрим их вид в дифференциальной форме.

По теореме Гаусса $\oint \vec{j} d\vec{f} = \int \mathrm{div}\,\vec{j}\, dV$, поэтому

$\int\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{j}\right) dV = 0$ или (т.к. dV — произвольно)

5) $\mathrm{div}\,\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ это и есть искомый вид.

Вспоминая, что $j_x, j_y, j_z = j^1, j^2, j^3$ а $c\rho = j^4$ и $ct = x^4$

можем записать (5) в 4-х виде

) $\frac{\partial j^1}{\partial x^1} + \frac{\partial j^2}{\partial x^2} + \frac{\partial j^3}{\partial x^3} + \frac{\partial j^4}{\partial x^4} = 0$ или $\frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0$ или $\frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0$

это есть 4-х дивергенция от 4-х вектора.

Уравнение Максвелла

Теперь мы готовы к их выводу из принципа наименьшего действия. Действие данное (3.8) + (4.2) и содержит переменные двух типов — координаты частиц и вектор-потенциалы. Мы можем варьировать либо по одним, считая другие постоянными, либо наоборот. Так, при выводе уравнений движения заряда в поле мы варьировали по координатам частицы, считая поле заданным распределением и получили (2.6) и (2.7), что

$\delta_p S = 0 \Rightarrow mc\frac{du_\mu}{dS} = \frac{e}{c}F_{\mu\nu}u^\nu$

$\vec{H} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$, $\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\,\varphi$ и опред. E, H

Определим $\mathrm{rot}\,\vec E = \vec\nabla\times\vec E$

$$\vec\nabla\times\vec E = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec\nabla\times\vec A - \vec\nabla\times\left(\vec\nabla\cdot\varphi\right)$$

Поскольку $\vec a\times\vec b = |a||b|\sin(\widehat{\vec a,\vec b})$, то для параллельных векторов $\vec a\times\vec b = 0$, поэтому последний член $= 0$ и мы находим

$$\mathrm{rot}\,\vec E = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec H \qquad (7)$$

$\mathrm{div}\,\vec H =$

Найдём теперь $\vec\nabla\cdot\vec H = \vec\nabla\cdot(\vec\nabla\times\vec A)$

~~нап~~ Векторное произведение всегда перпендикулярно своим множителям, поэтому $\vec\nabla\times\vec A\perp\vec\nabla$, след. их скалярное произведение $\sim\cos\alpha = 0$

Вследствие этого

$$\mathrm{div}\,\vec H = 0 \qquad (8)$$

Уравнения (7) и (8) есть первая пара уравнений Максвелла. Полностью поведение поля они не определяют, например, нет $\partial\vec E/\partial t$. Это связано с тем, что при их выводе варьировались только траектории частиц. Теперь будем считать их фиксированными и варьировать поля. Так как ток j^i связан с частицами, то при этом $\delta j^i = 0$. Из-за этого же

$$\delta S_p = 0$$

Итак

$$\delta S = \delta\{S_{f-p} + S_f\} = -\frac{1}{c^2}\int j^i A_i\, d\Omega = -\frac{1}{c^2}\int j^i A_i\, d\Omega + \frac{1}{16c\pi}\int F_{ik}F^{ik}\, d\Omega$$

$$\delta S = \int\left(-\frac{1}{c^2}j^i\delta A_i - \frac{1}{16\pi c}\delta(F_{ik}F^{ik})\right)d\Omega =$$

$$= -\frac{1}{c}\int\left\{\frac{1}{c}j^i\delta A_i + \frac{1}{8\pi}F^{ik}\delta F_{ik}\right\}d\Omega = 0$$

Вспоминаем определение $F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}$, тогда

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int\left\{\frac{1}{c}j^i\delta A_i + \frac{1}{8\pi}F^{ik}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\delta A_k - \frac{\partial}{\partial x^k}\delta A_i\right)\right\}d\Omega$$

2-ой член $i\rightleftarrows k$ $= +\frac{1}{8\pi}F^{ki}\frac{\partial}{\partial x^k}\delta A_i = -\frac{1}{8\pi}F^{ik}\frac{\partial}{\partial x^k}\delta A_i$, складываете с 3-им

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int\left\{\frac{1}{c}j^i\delta A_i - \frac{1}{4\pi}F^{ik}\frac{\partial}{\partial x^k}\delta A_i\right\}d\Omega = \ldots$$

[illegible] частям =
2-ой член

$$\int \left\{ \frac{1}{c} j^i + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_k} F^{ik} \right\} \delta A_i \, d\Omega + \frac{1}{4\pi c} \int F^{ik} \delta A_i \, dS_k \Big|_0^b$$

в конечной и начальной точке по времени $\delta A_a = \delta A_b = 0$, поэтому.

Далее, т.к. δA_i произвольны, то равно нулю {...}. В результате

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i \qquad (9)$$

Распишем (9) по компонентам.

Для $i=1$ $\quad \frac{\partial F^{11}}{\partial x} + \frac{\partial F^{12}}{\partial y} + \frac{\partial F^{13}}{\partial z} + \frac{\partial F^{10}}{c\partial t} = -\frac{4\pi}{c} j^1$

$$0 \quad \underbrace{-\frac{\partial H_z}{\partial y} + \frac{\partial H_y}{\partial z}}_{-(\mathrm{rot} H)_x} + \frac{\partial E_x}{c\partial t} = -\frac{4\pi}{c} j_x$$

$$(\mathrm{rot} H)_x - \frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} j_x$$

Аналогично для $i = 2, 3$

$$\mathrm{rot}\, \vec{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \qquad (10)$$

Для $i=0$ $\quad \frac{\partial F^{01}}{\partial x} + \frac{\partial F^{02}}{\partial y} + \frac{\partial F^{03}}{\partial z} + \frac{\partial F^{00}}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c} \cdot c\rho$

или $\quad \left(\frac{-\partial E_x}{\partial x} + \frac{-\partial E_y}{\partial y} + \frac{-\partial E_z}{\partial z} \right) = -4\pi\rho$

$$\mathrm{div}\, \vec{E} = 4\pi\rho \qquad (11)$$

Уравнения (10), (11) составляют вторую пару ур. Максвелла. Т.о., по заданным ~~токам и зарядам~~ можно найти поле в одной (начальным и граничным условиям на токи/заряды).

Полезно знать вид Ур. М. в системе СИ:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\varepsilon_0}{c^2} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\varepsilon_0 \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}/\varepsilon_0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$$

здесь ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума

$$\varepsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \frac{\text{кулон}^2}{\text{ньютон} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{к}^2 \text{сек}^2}{\text{кг} \cdot \text{м}^3}$$