План лекции  Прочитать по учебнику

1. Св-ва симметрии (3-х мер. инвар., лоренц-инвар.)

2. Уравнение движения заряда в поле в 4-х мерном виде

3. Тензор $F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}$, $F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ & 0 & -H_z & H_y \\ & & & -H_x \end{pmatrix}$

4. Преобр. инвар. тензора

Соответствие 3-х и 4-х мерных ур-ний движения

для $i = 1, 2, 3$  для $i = 0$  $\frac{d\mathcal{E}_{kin}}{dt} = e\vec{E}\cdot\vec{v}$

5) Преобр. Лоренца для $F^{ik}$ и для $\vec{E}, \vec{H}$

6) Инварианты поля.

$$F^{ik}F_{ik} = 2(H^2 - E^2)$$

$$e^{iklm}F_{ik}F_{lm} = \vec{E}\cdot\vec{H}$$, следствия.

на дом

7) Действие $S_f = a\int F_{ik}F^{ik}\,dV\,dt$

$a = -\frac{1}{16\pi}$  $S = -\frac{1}{16\pi c}\int F_{ik}F^{ik}\,d\Omega$, $d\Omega = dx\,dy\,dz\,dt$

## Лекция 3. Тензор электромагнитного поля

Выведем 4-х мерный аналог уравнения движения (5) исходим из принципа наименьшего действия

$\delta S = \delta \int_a^b \left(-mc\,ds - \frac{e}{c} A_i dx^i\right) = 0$ операция варьирования может переставляться с интегрированием и дифференц.

$$\delta S = \int \left[-mc\,\delta ds - \frac{e}{c}\delta(A_i dx^i)\right]$$

$ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{x}^2 = dx_i dx^i \Rightarrow ds = \sqrt{+dx_i dx^i}$, $\delta ds = \dfrac{+2\,dx_i\,\delta dx^i}{2\sqrt{+dx_i dx^i}}$

$$\delta S = -\int \left[mc\frac{dx_i\,\delta dx^i}{ds} + \frac{e}{c}A_i\,\delta dx^i + \frac{e}{c}\delta A_i\,dx^i\right] =$$

$$= -\int \left[\underbrace{mc\frac{dx_i\,d\delta x^i}{ds}}_{1} + \underbrace{\frac{e}{c}A_i\,d\delta x^i}_{2} + \frac{e}{c}\delta A_i\,dx^i\right] = 0$$

-1- и -2- интегрируем по частям и $\frac{dx_i}{ds} = u_i$ — 4-х скорость

-1- $mc\frac{dx_i}{ds}\delta x^i\Big|_a^b - \int_a^b mc\,du_i\,\delta x^i + \frac{e}{c}A_i\,\delta x^i\Big|_a^b - \frac{e}{c}\int_a^b dA_i\,\delta x^i$

но $(\delta x^i)_a = (\delta x^i)_b = 0$ — т.к. концы траектории фиксированы.

$\delta A_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\delta x^k$, $dA_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^k}dx^k$

Тогда $\delta S = \int_a^b \left[+mc\,du_i\,\delta x^i + \frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial x^k}dx^k\,\delta x^i - \frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial x^k}\delta x^k\,dx^i\right] = 0$

$du_i = \frac{du_i}{ds}ds$  $dx^i = u^i ds$  $i \to k$, $k \to i$

$$\delta S = \int ds\,\delta x^i\left[+mc\frac{du_i}{ds} - \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\right)u^k\right] = 0$$

т.к. $\delta x_i$ произвольно, то $[\ldots] = 0$.

или

(1) $mc\frac{du_i}{ds} = \frac{e}{c}F_{ik}u^k$, где $F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}$ есть тензор эл. м. поля

он антисимметричен, $F_{ki} = -F_{ik}$

отсюда $F_{ii} = -F_{ii} = 0$

Вычислим для примера $F_{12} = \frac{\partial A_2}{\partial x_1^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2^2} = \frac{-\partial A_y}{\partial x} - \frac{-\partial A_x}{\partial y} = -(\mathrm{rot} A)_z = -H_z$

аналогично для остальных. В результате

$$\hat{F} = \begin{pmatrix} 0, & H_z, & -H_y, & -iE_x \\ -H_z & 0, & H_x, & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0, & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z, & 0 \end{pmatrix} \qquad F_{ik} = \begin{pmatrix} 0, & E_x, & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H \\ -E_y & H_z & 0 & \\ -E_z & -H_y & H_x & \end{pmatrix}$$

$F_{0k} = (\vec{E}, \vec{H})$

$$F_{14} = \frac{\partial A_4}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_4} = \frac{\partial(i\varphi)}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial(ict)} = i\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{i}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} = i\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \ldots\right.$$

~~сравнивая~~ с (2.6) $\longrightarrow \quad = -iE_x$

посмотрим, действительно ли (1) эквив. ур-нию (2.8)

возьмём $i=1$ в (1) $\quad mc\frac{du_x}{ds} = \frac{e}{c} F_{xk} u_k$

$$u_i = \left(\frac{\vec{v}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) \qquad u_i = \left(\frac{1}{\sqrt{\ }} i, \frac{-\vec{v}/c}{\sqrt{\ }}\right)$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{mc\vec{v}_x}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = \frac{e}{c}\left(H_z\frac{v_y}{c\sqrt{\ }} - H_y\frac{v_z}{c\sqrt{\ }}\right) + \frac{e}{c}(-iE_x)\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$m\frac{dp_x}{ds} = \frac{e}{c}(\vec{v}\times\vec{H})_x + \frac{eE_x}{c} \qquad \frac{dp_x}{ds} = \frac{dp_x}{dt}\frac{dt}{ds}$$

$$\frac{ds}{dt} = c\sqrt{\ } \qquad \dot{p}_x = \frac{e}{c}(\vec{v}\times\vec{H})_x + eE_x \quad \text{ч.т.д.}$$

$i=0 \quad mc$

$$u^0 = \frac{d(ct)}{ds}$$

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{c\sqrt{\ }}$$

$$p_x = \frac{mv_x}{\sqrt{\ }}$$

аналогично для $i=2,3$. Для $i=0$ получим следствие (2.8) согласно которому $\vec{H}$ не затрачивает работы над зарядом

$$\frac{d\mathcal{E}_{кин}}{dt} = e\vec{E}\cdot\vec{v}$$

Замечание $F_{ik}$ не меняется при градиентных преобразованиях

$A_k \to A_k + \partial f/\partial x_k^k$, $\quad F_{ik} \to \frac{\partial A_k}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^i \partial x_k^k} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^k \partial x_i^i} = F_{ik}$

$A_i \to A_i + \partial f/\partial x_i^i$

важно для получения действия поля.

Преобразование Лоренца для поля
Для всех четырёх-векторов преобраз. одинаково, поэтому все $A_k$ так же как и для $X_k$. Если система $K'$ движется вдоль оси X относ. K, то

Преобразование Лоренца для поля

$x^0 = \gamma(x^{0\prime} + \beta x^{1\prime})$
$x^1 = \gamma(x^{1\prime} + \beta x^{0\prime})$
$x^2 = x^{2\prime}$
$x^3 = x^{3\prime}$

$\beta = (V/c)$ $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$$x^i = \alpha^i{}_j x^{j\prime} \quad \text{где} \quad \alpha^i{}_j = \begin{pmatrix} \gamma, & \gamma\beta, & 0, & 0 \\ \gamma\beta, & \gamma, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$$

Преобразование тенз. 2-го ранга

$F^{ik} = \alpha^i{}_\ell \alpha^k{}_m F^{\prime\ell m}$

Найдём закон преобр. для $F^{ik}$. Имеем 6 независимых компонент $F^{01}, F^{02}, F^{03}, F^{12}, F^{13}, F^{23}$

$$F^{01} = \alpha^0{}_\ell \alpha^1{}_m F^{\prime\ell m} = \alpha^0{}_\ell(\alpha^1{}_0 F^{\prime\ell 0} + \alpha^1{}_1 F^{\prime\ell 1}) = \gamma\beta(\alpha^0{}_0 F^{\prime 00} + \alpha^0{}_1 F^{\prime 10}) + \gamma(\alpha^0{}_0 F^{\prime 01} + \alpha^0{}_1 F^{\prime 11})$$

$$= -\gamma^2\beta^2 F^{\prime 01} + \gamma^2 F^{\prime 01} = \gamma^2(1-\beta^2) F^{\prime 01} = \frac{1}{1-\beta^2}(1-\beta^2) F^{\prime 01} = F^{\prime 01} \qquad (1)$$

$$F^{02} = \alpha^0{}_\ell \alpha^2{}_m F^{\prime\ell m} = \alpha^0{}_\ell \alpha^2{}_2 F^{\prime\ell 2} = \alpha^0{}_0 F^{\prime 02} + \alpha^0{}_1 F^{\prime 12} = \gamma(F^{\prime 02} + \beta F^{\prime 12}) \quad (2)$$

$F^{03} = \gamma(F^{\prime 03} + \beta F^{\prime 13})$

$F^{12} = \gamma(F^{\prime 12} + \beta F^{\prime 02})$

$F^{13} = \gamma(F^{\prime 13} + \beta F^{\prime 03})$

$F^{23} = \alpha^2{}_\ell \alpha^3{}_m F^{\prime\ell m} = F^{\prime 23}$

$E_x = -F^{01} = E'_x$, $E_y = \gamma(E'_y + \beta H'_z)$, $E_z = \gamma(E'_z - \beta H'_y)$

$H_x = H'_x$, $H_y = \gamma(H'_y - \beta E'_z)$, $H_z = \gamma(H'_z + \beta E'_y)$

(7)

т.о. величины полей в различных системах разные.
В частности, можно подобрать такую систему, где $\vec{E}=0$ либо $\vec{H}=0$

Если в системе $K'$ $\vec{H}'=0$ то у (7) при $v \ll c$, при всех $v/c$

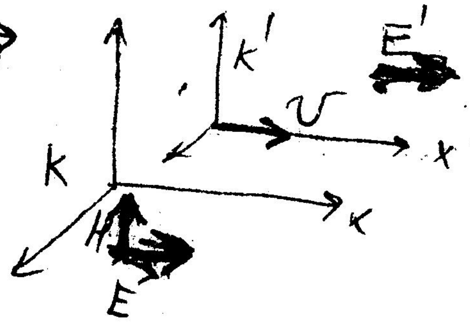
$$H_x = 0, \quad H_y = -\frac{v_x}{c} \underbrace{E'_z \gamma}_{=E_z}, \quad H_z = \frac{v_x}{c} \underbrace{E'_y \gamma}_{=E_y}$$

т.к. $v_y = v_z = 0$ и $\gamma E'_{y,z} = E_{y,z}$

то отсюда следует $\vec{H} = \frac{1}{c} \vec{V} \times \vec{E}$, где $\vec{V}$ — относительная скорость систем

Так же находим, что если в $K'$ $\vec{E}'=0$, то в системе $K$ $\vec{E} = -\frac{1}{c} \vec{V} \times \vec{H}$

то есть в системе $K$ $\vec{E} \perp \vec{H}$




## Инварианты поля

При преобразованиях Лоренца инварианты скаляры, поэтому если мы хотим узнать, какие комбинации полей E и H не меняются, нужно составить из $F_{ik}$ скаляры. Их два:

$$F_{ik}F^{ik} = inv \quad и \quad e^{iklm} F_{ik} F_{lm} = inv$$

$e_{1230} = 1$, при совпад. индексов нуль

Почему это скаляр? Потому что после $\sum_{ik}$ нет зависимости от индексов

не успел

в трехмерном виде

$$\sum_{ik} F_{ik}F^{ik} = (H_z^2 + H_y^2 + H_x^2)\cdot 2 - (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2)\cdot 2 = 2(H^2 - E^2)$$

Из 2-го следует $\vec{E} \cdot \vec{H} = inv$ (это псевдоскаляр, т.к. $H \to -H$ при инверсии)

Следствия а) если в какой-либо системе $\vec{E} \perp \vec{H}$, то есть $\vec{E} \cdot \vec{H} = 0$, то это выполняется и в любой другой инерциальной системе

б) если $|\vec{H}| = |\vec{E}|$ в $K$, то есть $H^2 - E^2 = 0$, то и в $\forall K'$ $|H'| = |E'|$

## Действие для электромагнитного поля.

Рассмотрим поле и частицу, взаимодействующие ...

$\int S_{f-p} \cdot S_{f-p}$

... $S_p$ и $S_{f-p}$ определены в л.2 и являются действием свободной частицы (particle) и взаимодействующей с полем (field) частицы

Для установления вида действия для поля $S_f$ исходим из опыта и некоторых предположений

a) поле подчиняется принципу суперпозиции, т.е. есть два поля, созданные двумя зарядами, складываются

б) т.к. поле удовлетворяет своему уравнению поля, а сумма полей тоже есть поле, то сумма решений также должна удовлетворять уравнению поля

Таким свойством обладают линейные дифференциальные уравнения → Лагранжиан квадратичен по полю, причём не по $A_i^2$ (т.к. эта величина неоднозначна), а по $F_{ik}$ (см. замечание в л.2). Итак

$$S_f = a\iint F_{ik}F^{ik}\,dV\,dt$$

мы знаем, что $F_{ik}F^{ik} = 2(H^2-E^2)$ - инв.

Численное значение $a$ зависит от выбора единиц для измерения поля, в гауссовой системе $a = -1/16\pi$

Если пользуются иногда системой Хевисайда, $a = -1/4$.

Итак, $S_f = -\frac{1}{16c\pi}\int F_{ik}F^{ik}\,d\Omega$, $d\Omega = c\,dx\,dy\,dz\,dt$

или в 3-х мерном $S_f = \frac{1}{8\pi}\iint (E^2-H^2)\,dV\,dt$, $L_f = \frac{1}{8\pi}\int(E^2-H^2)\,dV$

Тогда

$$S = -\sum_{\text{particles}} \int mc\,ds - \sum \int \frac{e}{c}A_k\,dx^k - \frac{1}{16c\pi}\int F_{ik}F^{ik}\,d\Omega \qquad (8)$$