$$\text{результат} \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \underbrace{\underbrace{-\frac{e}{c}\frac{\partial A}{\partial t} - e\,\mathrm{grad}\,\varphi}_{\text{не зависит от } \vec{v}} + \underbrace{\frac{e}{c}\vec{v}\times\mathrm{rot}\,\vec{A}}_{\text{зависит от } \vec{v}}}_{\text{это есть сила в уравнении Ньютона}} \qquad (5)$$

Силу, не зав. от скорости и отнесённую к единице заряда, называют напряжённостью электрического поля

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} - \mathrm{grad}\,\varphi \qquad (6)$$

$\mathrm{rot}\,\vec{A}$ называют напряженностью магнитного поля

$$\vec{H} = \mathrm{rot}\,\vec{A} \qquad (7)$$

т.о. электром. поле вместо 4-х потенциала $(\vec{A}, \varphi)$ может характеризоваться напряжённостями $\vec{E}, \vec{H}$.

Если $\vec{E} \neq 0$, $H = 0$ – электрическое поле
$\vec{E} = 0$, $H \neq 0$ – магнитное поле

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v}\times\vec{H} \text{ – сила Лоренца } = \vec{F}_E + \vec{F}_H \qquad (8)$$

$$\vec{F}_E \parallel \vec{E}, \text{ а } \vec{F}_H \perp \vec{H} \perp \vec{v}$$

Заметим, что работа $dA \sim \vec{F}\cdot d\vec{l} = \vec{F}\vec{v}dt$, т.к. $\vec{F}_H \cdot \vec{v} = 0$ то магнитное поле не производит работы над движущимися в нём зарядом, только электрическое. Магнитное поле может искривить траекторию, но не изменит энергию.

<u>Инвариантность относительно инверсии времени</u>

Уравнение динамики инвариантны при $t \to -t$

Если в (8) заменить $t \to -t$, то $\vec{p} \to -\vec{p}$

$\frac{d\vec{p}}{dt} \to \frac{d\vec{p}}{dt}$, $\vec{E} \to \vec{E}$, $\vec{v} \to -\vec{v}$ и $\vec{H} \to -\vec{H}$

из (6) и (7) $\varphi \to \varphi$ $\vec{A} \to -\vec{A}$.

т.о. если изменить направление $\vec{H}$, то возникнет обратное движение со скор. $-\vec{v}$.

<u>Градиентная инвариантность</u>. Т.к. в уравнение движения (8) входит не A_μ, а только производные, то можно изменить A_μ, не меняя $\vec{E}$ и $\vec{H}$.

...случае в данную $A'_k = A_k + \frac{\partial f}{\partial x^k}$, $f(\vec r, t)$ — произвольн.

тогда $S_{\text{ф-р}} = \frac{e}{c}\int_a^b \sum_k A_k\, dx_k$ — изменится на $\frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k = df$.

$\int_a^b df$ есть величина, $f(b) - f(a)$ — не зависит от пути интегрирования, поэтому при вариации $\delta S = 0$ вклада не даёт

В трёхмерном виде наше преобразование есть

$$\vec A' = A + \operatorname{grad} f, \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} \quad E \text{ и } H \text{ не меняются} \ (9)$$

Физический смысл имеют лишь те величины, которые инвариантны относит. преобр. (9). Эта инвар. называется градиентной. Заметим, поскольку в действие входит $\underline{\underline{e}}$ и предполагается, что e не меняется при (9).

Т.о. сохранение заряда тесно связано с градиентной инвариантностью. Связь законов сохранения с инвариантностью

Следствие град. инвар. позволяет наложить одно дополнит. на условие на $(\vec A, \varphi)$, соответствующее своей функции f. В частн., можно выбрать $\varphi = 0$. но $\vec A = 0$ нельзя, так как это три условия $A_x = 0$ $A_y = 0$ $A_z = 0$.

Частный случай постоянное электромагн. поле $\frac{\partial A}{\partial t} = 0$

тогда $\vec H = \operatorname{rot} \vec A$; $E = -\operatorname{grad}\varphi$

удобно выбрать φ так, чтобы $\varphi(r = \infty) = 0$, тогда неоднозначность устраняется

Однородное поле если $\vec E(\vec r) = E \vee H(\vec r) = H - \text{const}$

в этом случае $(E: \text{const})$ $\varphi = -\vec E \cdot \vec r$ $\quad \operatorname{grad}(\vec E \vec r) = (\vec E \cdot \vec\nabla)\vec r + \vec E \times \cancel{\operatorname{rot} \vec r}^{\,0} = -\vec E$

по формуле (3)

магнитное однородное поле

1) $\vec A = +\frac{1}{2}\vec H \times \vec r$; $\operatorname{rot}(\vec H \times \vec r) = \vec H \operatorname{div}\vec r - (\vec H \vec\nabla)\vec r = 2\vec H$ т.к. $\operatorname{div}\vec r = 3$

2) $A_x = -Hy$ $A_y = A_y = 0 \Rightarrow \vec H = (0, 0, H)$

4-х векторы: $x^i = (ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ — контравариантный
Четырёхмерным вектором A^i наз. совокупность (A^0, A^1, A^2, A^3) преобразующаяся как компоненты x^i:

$$A^0 = \frac{A'^0 + v/c\, A'^1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad A^1 = \frac{A'^1 + v/c\, A'^0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad A^2 = A'^2 \quad A^3 = A'^3$$

ковариантный 4-вектор $A_i = g_{ik} A^k$, $A_0 = A^0$, $A_1 = -A^1$, $A_2 = -A^2$, $A_3 = -A^3$

квадрат 4-вектора: $(A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2 = A^0 A_0 + A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3 = \sum_{i=0}^{3} A^i A_i$

Скалярное произведение: $A^i B_i = A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3$ $\quad \Sigma\ 0$

$x^i = (ct, \vec{r})$, $x_i = (ct, -\vec{r})$ $\quad x^i x_i = c^2 t^2 - r^2$

4-х тензор 2го ранга — 16 величин, преобразующихся как произведение 4-х векторов: контравариантные A^{ik}, ковариантные A_{ik} и смешанные $A_i^{\ k} \neq A^i_{\ k}$

$A^i_{\ k} = g^{il} A_{lk}$; $A^{ik} = g^{il} g^{km} A_{lm}$. В нашем случае правило такое: поднятие или опускание индекса 0 не меняет знака, а $i = 1, 2, 3$ меняет.

единичный 4-тензор $\delta_i^k = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$ Если опустить или поднять индекс у δ_i^k получим метрический тензор $g_{ik} = g^{ik}$

$A_i = g_{ik} A^k$, $A^i = g^{ik} A_k$

$A_i B^i = g_{ik} A^i B^k$. Пространственные $(i, k = 1, 2, 3)$ 9 компонент есть трёхмерный антисимметричный (не обязат.) тензор, A^{01}, A^{02}, A^{03} — вектор, A_{00} — скаляр. Антисимметр.

Эл-нт пов. в 4-х

4-х вид теоремы Гаусса: $\oint A^i dS_i = \int \frac{\partial A^i}{\partial x^i} d\Omega$ и Стокса: $\oint A^i dx_i = \int df^{ki} \frac{\partial A_i}{\partial x^k}$

Кроме g_{ik}, δ_i^k и g^{ik}, обладающих свойством, что все компоненты одинаковы в любой системе, такое же св-во у антисимметр. единичн. тензора 4го ранга $e^{iklm} = \pm 1$, $e^{0123} = 1$
При любой совпадающей паре индексов $= 0$, при изменении любой пары меняет знак.

4-х градиент $\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{r}} \right)$, удобно. $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ и $\partial^i = \frac{\partial}{\partial x_i}$

4-х скорость $u^i = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{\vec{v}}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right)$, $u^i u_i = 1$, $u^i = \frac{\partial x^i}{\partial s}$

План лекции

1) Понятие о поле. Скалярное, векторное поле. ... Лаг.

2) Эл. поле. Мат 1. Св-ва 4-х векторов и тензоров. Лагранжиан Лоренца. Мат. 2. Оператор Гамильтона и действие с ним.
Напряж.

3) Электр. и магн. поле. Работа.

4) Св-ва симметрии а) $t \to -t$
б) $A'^k = A^k - \frac{\partial f}{\partial x_k}$

5) Частные случаи. Постоянное поле. Однородное элект. и маг...

Лекция 2 Четырёхмерный потенциал электромагнитного поля

Л.Л.т.II

Эл.маг. поле является векторным и описывается четырьмя функциями координат и времени $A_i(\vec{r},t)$ или четырёх~~мерным~~ потенциалом $(A_0,\vec{A})$. Этот потенциал определяет действие эл.м. поля, в взаимодействующего с заряженной частицей

§8 $$S_{f-p} = -\frac{e}{c}\int_a^b \sum_{i=0}^{3} A_i\,dx_i = \frac{e}{c}\int A_i\,dx^i \qquad e - \text{заряд}, \qquad x^0 = ct,\ x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z$$

где интеграл берется в точках мировой линии частицы (т.е. вдоль ее траектории в 4-х мерном пространстве)

Из СТО известно действие свободной частицы

$$S_p = -mc\int_a^b ds \qquad s^2>0 \text{ времениподобный} \qquad g_{ik} = g^{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$S_p = -mc^2\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{1-v^2/c^2}\,dt \qquad ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \qquad A^i = g^{ik}A_k,\ A_i = g_{ik}A^k$$

здесь m - масса, ds - элемент длины 4-х пространства

У всех 4-х векторов ~~первые~~ три компоненты $i=1,2,3$ есть некоторый трехмерный вектор, а ~~четвертая~~ нулевая - скаляр - например

$(ct,\vec{r})$; $(\vec{p},\frac{E}{c})$

пр-во-время   энергия-импульс

Точно также A_1, A_2, A_3 образуют вектор-потенциал $\vec{A}(\vec{r},t)$, а $A_0 = \varphi$, φ - скалярный потенциал. Поэтому $A^i = (\varphi,\vec{A})$

$$S_{f-p} + S_p = \int_a^b\left(-mc\,ds + \frac{e}{c}\vec{A}\cdot d\vec{r} - e\varphi\,dt\right) =$$

$u^i = \frac{dx^i}{ds} = \gamma \to ds \to \frac{ds}{dt}dt$, $d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt}dt = \vec{v}\,dt$, тогда

$$= \int_{t_1}^{t_2}\left(-mc^2\sqrt{1-\left(\tfrac{v}{c}\right)^2} + \frac{e}{c}\vec{A}\cdot\vec{v} - e\varphi\right)dt \qquad \text{отсюда}$$

сравнивая с $S = \int L\,dt$, находим ф-цию Лагранжа частицы в эл.м. поле

$$L = -mc^2\sqrt{1-\left(\tfrac{v}{c}\right)^2} + \frac{e}{c}\vec{A}\vec{v} - e\varphi \qquad (1)$$

отсюда находим обобщенный импульс $\vec{P}$

$$\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} + \frac{e}{c}\vec{A} = \vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A},$$

где $\vec{p}$ - импульс релятивистской частицы

⊗ если бы частица покоилась, $ds = c\,dt_{частицы}$
при движении $dt_{част.} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt_{лаб.}$ отсюда и следует L

Нерелятивистский предел: $v \to 0$

$$mc^2\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \approx mc^2\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\right) = mc^2 - \frac{mv^2}{2}$$

член mc^2 есть const, несущественная для L, т.к. в уравнениях Лагранжа входит только производные, поэтому

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{c}\vec{A}\vec{v} - e\varphi \qquad (2$$

в этом же пределе $\vec{P} = m\vec{v} + \frac{e}{c}\vec{A}$

<u>Уравнение движения заряда в поле</u>. Имеем 3 ур-ния, x, y

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}, \quad \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \text{ мы знаем, это } \vec{P}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} \equiv \vec{\nabla}L, \quad \vec{\nabla} = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\equiv \text{grad}\,L$$

$$= \frac{e}{c}\,\text{grad}\,\vec{A}\vec{v} - e\,\text{grad}\,\varphi$$

$\cancel{\vec{\nabla}(\vec{a}\vec{b}) = (\vec{a}\vec{\nabla})\vec{b} + (\vec{b}\vec{\nabla})\vec{a} + \vec{b}\times\text{rot}\,\vec{a} + \vec{a}\times\text{rot}\,\vec{b}}$

оператор Гамильтона

<u>Математическое отступление</u> операции с $\vec{\nabla}$, на:

а) действие на скаляр: есть вектор $\vec{\nabla}\varphi = \left(\vec{i}\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \vec{j}\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \vec{k}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) \equiv \text{grad}$

б) действие на вектор

1. скалярный результат $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} \equiv \text{div}\,\vec{A} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)$
2. векторный результат $\vec{\nabla}\times\vec{A} \equiv \text{rot}\,\vec{A}$

по правилам векторного произведения $= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$

$$(\text{rot}\,\vec{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$$

Циклическая перестановка $x \to y$, $y \to z$, $z \to x$

$$(\text{rot}\,\vec{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

$$(\text{rot}\,\vec{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

Вернёмся к $\vec\nabla(\vec A \vec V)$ поскольку в $\vec V$ входит частная производная, то $\vec V$ не дифференцируется.

Докажем, что $\text{grad}(\vec A \cdot \vec V) = (\vec V \cdot \vec\nabla)\vec A + \vec V \times \text{rot}\vec A$ (3)

рассмотрим x-компоненту

$$\frac{\partial}{\partial x}(\vec A \cdot \vec v) = (\vec v \cdot \vec\nabla) A_x + \left(V_y (\text{rot} A)_z - V_z (\text{rot} A)_y\right)$$

перенесём

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(A_x v_x + A_y v_y + A_z v_z\right) - \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}\right) A_x =$$

$$= \cancel{v_x \frac{\partial A_x}{\partial x}} + v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial x} - \cancel{v_x \frac{\partial A_x}{\partial x}} - v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} - v_z \frac{\partial A_x}{\partial z} =$$

$$= v_y\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) + v_z\left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right) =$$

$$= v_y (\text{rot}\vec A)_z - v_z (\text{rot}\vec A)_y \quad \text{ч.т.д.}$$

аналогично по остальным компонентам.
Здесь нам помогло, что один вектор был константа. Если же оба зависят от $\vec r$, то по правилам дифференцирования произведений возникает сумма членов, поэтому

$$\vec\nabla(\vec a \cdot \vec b) = \underbrace{(\vec a \cdot \vec\nabla)\vec b + \vec a \times \text{rot}\vec b}_{\text{диф. } b} + \underbrace{(\vec b \cdot \vec\nabla)\vec a + \vec b \times \text{rot}\vec a}_{\text{диф. } a} \qquad (4)$$

end

Вернёмся к ф-ции Лагранжа

$$\text{grad}(\vec A \vec V) \quad \frac{\partial L}{\partial \vec r} = \frac{e}{c}(\vec v \cdot \vec\nabla)\vec A + \frac{e}{c}\vec v \times \text{rot}\vec A - e\,\text{grad}\varphi$$

ур-ние Лагранжа имеет вид

$$\frac{d}{dt}\left(\vec p + \frac{e}{c}\vec A\right) = \frac{e}{c}(\vec v \vec\nabla)\vec A + \frac{e}{c}\vec v \times \text{rot}\vec A - e\,\text{grad}\varphi$$

но $\dfrac{d\vec A}{dt} = \dfrac{\partial A}{\partial t} + \dfrac{\partial \vec A}{\partial \vec r} \cdot \dfrac{d\vec r}{dt} = \dfrac{\partial A}{\partial t} + (\vec v \cdot \vec\nabla)\vec A$