…гиарлонного ~~торможения~~ (затухание)

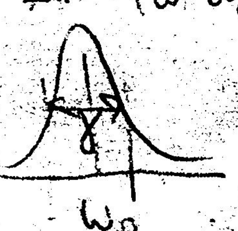
$E = E_0 e^{-i\omega_0 t - \gamma t/2} = \int E_\omega e^{-i\omega t} d\omega$, где $E_\omega = \int \frac{dt}{2\pi} e^{i\omega t} E(t)$

при $\gamma = 0$ $E_\omega = E_0 \int\limits_{\infty} \frac{dt}{2\pi} e^{i(\omega-\omega_0)t} = E_0 \delta(\omega-\omega_0)$

при $\gamma \neq 0$ $E_\omega = \frac{E_0}{2\pi} \int\limits_0 dt\, e^{i(\omega-\omega_0)t} e^{-\gamma t/2} = \frac{E_0}{2\pi} \frac{1}{i(\omega_0-\omega) - \frac{\gamma}{2}}$

отсюда интенсивность $I = \int I_\omega e^{-i\omega t} d\omega$ можно добавить intg

$I_\omega = \frac{I_0 \gamma}{2\pi} \frac{1}{(\omega-\omega_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}$, ширина линии $\Delta\omega \sim \gamma = \frac{2}{3}\tau_0 \omega_0^2$



$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$, поэтому $\Delta\lambda = 2\pi c \Delta\left(\frac{1}{\omega}\right) =$

$= \frac{2\pi c \Delta\omega}{\omega_0^2} = 2\pi c \cdot \frac{2}{3}\tau_0 = \frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{mc^2} \approx 10^{-12}$ см

это есть естественный источник уширения τ_0

причем практически для всего диапазона частот (кроме γ-лучей) условие $\omega_0 \gg \gamma$ выполняется

условие $\Delta\omega/\gamma \sim 1$ эквивалентно следующему:

$\gamma^{-1} \sim \Delta t$, $\Delta E \sim \hbar\Delta\omega \to \Delta E \Delta t \sim \hbar$ – Гейзенберг.

ΔE – ширина уровня Δt – время жизни

Лекция 13 Излучение движущегося заряда.

См. конс (л12)

Предположим, что известна зависимость $\vec r'(t')$, определяющая движение заряда, т.е. из точки $\vec r'$ в момент t' испускаются ... со скоростью света и в момент t прибывают в точку наблюдения $P(\vec 0)$. Поле такого движущегося заряда определяется потенциалами Лиенара-Вихерта

(1) $$\varphi = \frac{q}{r' - \frac{\vec v\cdot\vec r'}{c}}, \qquad \vec A = \frac{1}{c}\frac{q\vec v}{r' - \frac{\vec v\cdot\vec r'}{c}},$$ всё в момент $t' = t - \frac{r'}{c}$

Как обычно, $\vec E = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec A}{\partial t}$, $\vec H = \nabla\times\vec A$, причём дифференцирование здесь идёт по координатам $\vec r, t$ точки P, а в потенц. Лиен.-Вихерта входят $\vec r', t'$. Поэтому надо перейти к переменным. Имеем $r' = c(t-t')$

$$\frac{\partial r'}{\partial t} = \frac{\partial r'}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}, \qquad r = \sqrt{\vec r^{\,2}}$$

$$\frac{\partial r}{\partial t'} = \frac{2\vec r\cdot\frac{\partial\vec r}{\partial t'}}{2r} = -\frac{\vec r\cdot\vec v(t')}{r},$$ здесь минус потому, что вектор $\vec r$ направлен не от центра к заряду, а наоборот, поэтому $\partial\vec r'/\partial t' = -\vec v$

Итак $-\frac{\vec r'\cdot\vec v'}{r'}\frac{\partial t'}{\partial t} = c\left(1-\frac{\partial t'}{\partial t}\right)$, откуда

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{c}{c - \frac{\vec r'\cdot\vec v'}{r'}} = \frac{1}{1-\frac{\vec r'\cdot\vec v'}{cr'}} = \frac{cr'}{cr' - \vec r'\cdot\vec v'} = \frac{r'}{s}$$ или $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{r'}{s}\frac{\partial}{\partial t'}$

Аналогично вычисляем координатные производные, дифференцируя выражение $t' = t - r'/c$

$\cancel{\nabla r' = \frac{\partial r}{\partial t'}\nabla t' = -\frac{\vec r'\cdot\vec v'}{r'}\,\mathrm{grad}\, t'}$

$$\mathrm{grad}\, t' = -\frac{1}{c}\mathrm{grad}\, r' = -\frac{1}{c}\left[\mathrm{grad}\, r'\big|_{t'=\mathrm{const}} + \frac{\partial r'}{\partial t'}\mathrm{grad}\, t'\right] =$$

$$= -\frac{1}{c}\left[\frac{\vec r'}{r'} - \frac{\vec r'\cdot\vec v'}{r'}\mathrm{grad}\, t'\right]$$ или $$\mathrm{grad}\, t'\left[1 - \frac{\vec r'\cdot\vec v'}{cr'}\right] = -\frac{\vec r'}{cr'}$$

или $\operatorname{grad} t' = -\dfrac{\vec r}{c\left(r' - \frac{\vec r'\cdot\vec v'}{c}\right)}$; $\left| \nabla f(\vec P, t') = \nabla_1 f - \dfrac{\vec r}{cS}\dfrac{\partial}{\partial t'} \right|$

Теперь можно вычислять поля. где ∇_1 диффер. по коорд. $\vec r$ (точка P, …

$\operatorname{grad}\varphi = \operatorname{grad}\dfrac{q}{S} =$, где для краткости $S = r' - \dfrac{\vec r'\cdot\vec v'}{c}$.

$$= q\frac{(-1)}{S^2}\operatorname{grad}\left(r' - \frac{1}{c}\vec r'\cdot\vec v'\right) = -\frac{q}{S^2}\left\{\frac{\vec r'}{r} - \frac{1}{c}\operatorname{grad}(\vec r'\cdot\vec v')\right\} =$$

см. мат. N1 (2.4)

$$= -\frac{q}{S^2}\left\{\frac{\vec r'}{r} - \frac{1}{c}\left[(\vec r'\cdot\nabla)\vec v' + \vec r'\times\underbrace{\operatorname{rot}\vec v'}_{0} + (\vec v'\cdot\nabla)\vec r' + \vec v'\times\underbrace{\operatorname{rot}\vec r'}_{0}\right]\right\}$$

$$(\vec r'\cdot\nabla)\vec v' = \left(x'\frac{\partial}{\partial x'} + y'\frac{\partial}{\partial y'} + z'\frac{\partial}{\partial z'}\right)\left(\vec i v'_x + \vec j v'_y + \vec k v'_z\right) =$$

$$= \vec i\left[x'\left(\underbrace{\frac{\partial v'_x}{\partial x'}}_{0} + \frac{\partial v'_x}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x'}\right) + y'\frac{\partial v'_x}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial y'} + z'\frac{\partial v'_x}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial z'}\right] + \vec j\left[v_x \to v_y\right] + \vec k[$$

$$\vec E = -\nabla\frac{q}{S} - \frac{q}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\vec v'}{S} = q\left\{\frac{1}{S^2}\nabla S - \frac{1}{c^2}\frac{r'}{S}\frac{\partial}{\partial t'}\frac{\vec v'}{S}\right\} = q\left\{\frac{1}{S^2}\nabla_1 S - \frac{\vec r'}{cS^3}\frac{\partial S}{\partial t'} -\right.$$

$$\left. - \frac{r'}{c^2S^2}\dot{\vec v}' + \frac{r'\vec v'}{c^2S^3}\frac{\partial S}{\partial t'}\right\}, \quad \text{но } \nabla_1 S = \nabla_1\left(r' - \frac{\vec r'\cdot\vec v'}{c}\right) = \frac{\vec r'}{r} - \frac{\vec v}{c} = \frac{\left(\vec r' - \frac{r}{c}\right.}{r}$$

поэтому $E = q\left\{\dfrac{\vec r - r\vec v/c}{S^2 r} - \dfrac{1}{cS^3}\left(\vec r' - \dfrac{r\vec v}{c}\right)\dfrac{\partial S}{\partial t'} - \dfrac{r'}{c^2S^2}\dot{\vec v}\right\} =$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial r'}{\partial t} - \frac{1}{c}\left(\frac{\partial\vec r'}{\partial t}\cdot\vec v + \vec r\cdot\dot{\vec v}\right) = -\frac{\vec r\vec v}{r} - \frac{1}{c}\left(-v^2 + \vec r\cdot\dot{\vec v}\right)$$

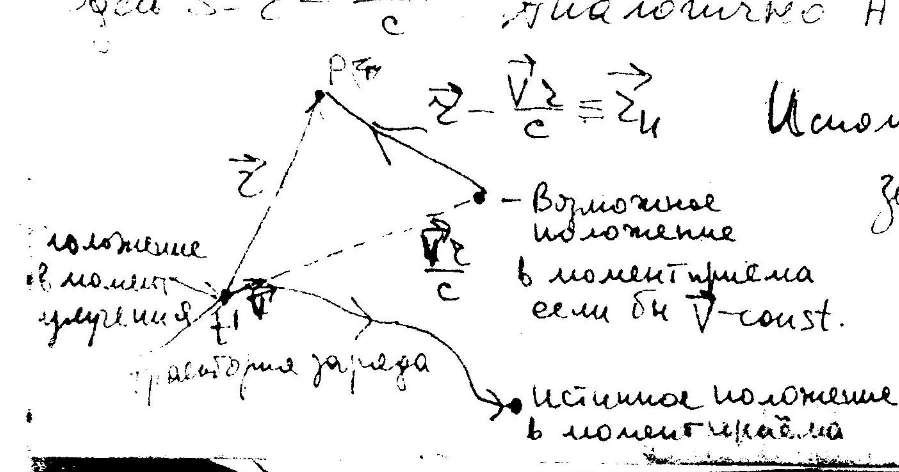
$$E = q\left\{\frac{\vec r - r\vec v/c}{S^3}\left[\frac{S}{r} + \frac{\vec r\vec v}{cr} - \frac{v^2}{c^2}\right] + \frac{1}{c^2S^3}\left[\left(\vec r - \frac{r\vec v}{c}\right)\vec r\cdot\dot{\vec v} - r'\left(r - \frac{\vec r\cdot\vec v}{c}\right)\right.\right.$$

$b\,ac - c\,ab = a\times(b\times c)$

$$\boxed{= q\left\{\frac{1}{S^3}\left(\vec r - \frac{r\vec v}{c}\right)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{1}{c^2S^3}\left\{\vec r\times\left[\left(\vec r - \frac{r\vec v}{c}\right)\times\dot{\vec v}\right]\right\}\right\}}$$

Здесь $S = r - \dfrac{\vec r\cdot\vec v}{c}$ Аналогично $\vec H = \vec r\times\vec E/r$ т.е. $\vec H \perp \vec E$

или $v \ll c$ $E \perp r$



Используя вектор $\vec r_u$, мы можем записать:

это … … т.е. При $V \ll c$ … … …

$\vec E = \vec E_{стат.} + \vec E_{изл.}$; $\vec E_{стат} = \frac{q}{S^3}\vec r_u\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)$, $E_{изл} = \frac{q}{S^3c^2}[\vec r\times[\vec r_u\times\dot{\vec V}]]$

Если сравним с (7.5) для поля равномерно-движущегося заряда, то увидим, что $\vec E_{стат}$ совпадает с ним, т.о. $\vec r_u$ имеет смысл „виртуального радиуса-вектора заряда" и

На больших расстояниях $r_u/S^3 \sim 1/r^2$, поэтому поток энергии от $E_{стат}$ при $r\to\infty$ равен нулю ($\vec S \sim E^2 \sim 1/r^4$, а площадь $\sim r^2$, т.о. интенсивность $I \sim 1/r^2 \to 0$) поэтому $E_{стат}$ не есть истинное излучение.

В то же время $E_{изл} \sim 1/r$, поэтому $I \to const$ при $r\to\infty$ это есть истинное излучение, определяемое ускорением заряда.

см Пановский, Фил, §18.5 с. 322.

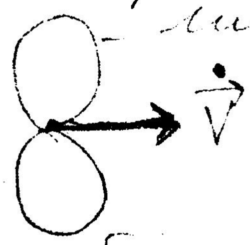
Излучение при малой скорости

устремим $v/c \to 0$, тогда $\vec r_u = r$ и $S=r$,

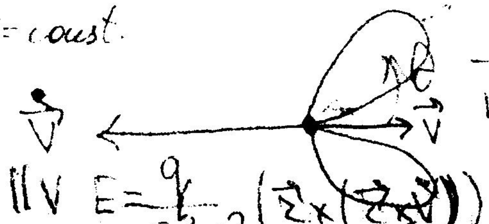
$E_{изл} = \frac{q}{c^2 r}(\vec n\times(\vec n\times\dot{\vec V}))$ совпадает с (12.4) для дипольного излучения одним зарядом, $\vec d = q\vec r$

Угловое распределение поле $dI \sim \sin^2\theta$

— линии $E = const$



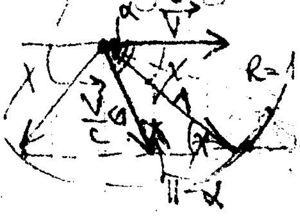
$\dot{\vec V}$



— картина поле излучения при торможении электрона

$\dot V \parallel V$ $E = \frac{q}{S^3c^2}(\vec r\times(\vec r\times\dot{\vec V})) = E_{дип.}\, r^3/S^3 = E_{дип}(1-\dots$

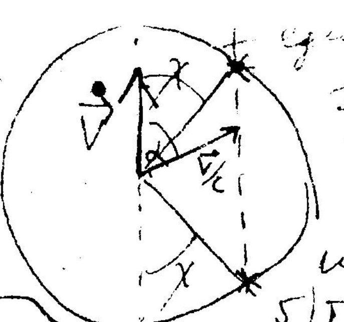
При любой скорости и ускорении всегда существуют два таких направления, для которых интенсивность излучения равна нулю. Эти направления находятся из условия параллельности векторов $\vec n - \frac{\vec V}{c}$ и $\dot{\vec V}$, тогда их векторное произведение и $\vec E_{изл} = 0$. Пусть α – угол между $\vec V$ и $\dot{\vec V}$



$R=1$ по теореме синусов

$\frac{1}{\sin(\pi-\alpha)} = \frac{V/c}{\sin\chi}$ или $\sin\chi = \frac{V}{c}\sin\alpha$

Правило построения точки R:



1) един. окр. (единичн...)
2) вектор $\dot{\vec v}$
3) вектор $\vec v/c$ ...
4) через конец $\vec v/c$ ... параллельную $\dot{\vec v}$
5) точки пересечения ...

⊗ стр 76

$\boxed{№ L14}$

Торможение излучением

Мы знаем, что функция Лагранжа в нерелятивистской теории зависит от координат и скоростей частиц и полевых функций. Если бы скорость распространения сигналов $c\to\infty$, то вся взаимодействия ... поле ненужно, можно описать всё через мгновенное взаимодействие только частиц. Т.о. эффекты запаздывания появл. и только благодаря $v/c\neq 0$. Тем не менее, при малых v/c можно разложить L в ряд по v/c, тогда первый член $\sim v/c$ соответствует системе зарядов с взаимодействием, второй $\sim (v/c)$ ... запаздывающим потенциалам. Сейчас мы проведём разложение до членов более высокого порядка. В разложении скалярного запаздывающего потенциала

$\varphi=\int\frac{1}{R}\rho(t-R/c)\,dV$, $\rho(t-R/c)$ по степеням R/c:

член $\sim 1/c^3$ есть

$\varphi^{(1)}=0$, $\varphi^{(2)}$ – ... $\quad \varphi=\int\frac{\rho}{R}dV-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\,dV+\frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int R\rho\,dV-\frac{1}{3!c^3}\dots$

$$\varphi^{(3)}=-\frac{1}{6c^3}\frac{\partial^3}{\partial t^3}\int R^2\rho\,dV$$

Т.к. в E входит $\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}$, то A нужно ... $\sim 1/c^2$

но $\int\rho\,dV=e=\text{const}$, $\frac{\partial e}{\partial t}=0$

$$\vec A^{(2)}=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int\vec j\,dV.$$

С помощью градиентного преобразования можно выбрать $\varphi^{(3)\prime}=\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}=0$. Тогда $\vec A'=\vec A+\operatorname{grad} f$,

$f=\frac{1}{6c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int R^2\rho\,dV$, $\nabla f=\frac{1}{3c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int R\dots$ Отсюда найдём f

Ландау §75

и $$\vec A'^{(2)}=-\frac{2}{3c^2}\sum e\dot{\vec v}.$$ Соответствующее поле $\vec E=-\frac{1}{c}\dot{\vec A}$ $\left[+\frac{1}{3c^2}\sum \dots\right.$ не ... т.к. $\left.\frac{dR}{dt}=-\frac{\partial R}{\partial t}=-v\right]$

добавить вывод: $\vec E=+\frac{2}{3c^3}\dddot{\vec d}$, $\vec H^{(2)}=\operatorname{rot}\vec A'^{(1)}=0$ т.к. нет зав. от $\vec r$

Рассмотрим систему зарядов, на каждый действует сила $F=eE$

$$\vec F=\frac{2e}{3c^3}\dddot{\vec d}$$

Работа этой силы для всей системы в единицу времени

$$\sum\vec F\vec v=\frac{2}{3c^3}\dddot{\vec d}\sum\vec v e=\frac{2}{3c^3}\dddot{\vec d}\cdot\dot{\vec d}=\frac{2}{3c^3}\frac{d}{dt}(\ddot{\vec d}\cdot\dot{\vec d})-\frac{2}{3c^3}\ddot{\vec d}\cdot\ddot{\vec d}$$

При усреднении по времени $\overline{\frac{d}{dt}\dots}=0$, $\to$ $\overline{\sum \vec F\cdot\vec v}=-\frac{2}{3c^3}\overline{\ddot{\vec d}^2}$ = мин. энерги... Т.к. ... излучения

(XX) см. самоускорение ~~??~~ книгу стр. 76

~~Выражение для силы~~

Классич. электродинамика применима только когда сила торможения мала по сравнению с др. силой. Во внешнем поле ур-ние движения

$$m\dot{\vec{v}} = F_\lambda + F_{торм.} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v}\times\vec{H} + \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\vec{v}}$$

Пишем условие $F_{торм} \ll F_\lambda$. В системе координат, где заряд в данный момент покоится ($F_{торм}/F_\lambda \ll 1$ преобразуем)

$$\ddot{V} = \frac{1}{m}\dot{F}_\lambda = \frac{e}{m}\dot{E} + \frac{e}{mc}\dot{\vec{v}}\times\vec{H} \approx \frac{e}{m}\dot{E} + \frac{e^2}{m^2c}\vec{E}\times\vec{H}$$

$\dot{V} = \frac{e}{m}E$ (член $\frac{e}{c}v\times H$ дает более степень e)

Тогда $F_{торм} = \frac{2e^2}{3c^3}\left(\frac{e}{m}\dot{\vec{E}} + \frac{e^2}{m^2c}\vec{E}\times\vec{H}\right)$

если ω — частота движения, то $\dot{E} \sim \omega\vec{E}$, так что

$$F_1 \sim \frac{e^3}{mc^3}\omega E, \quad F_2 \sim \frac{e^4}{m^2c^4}EH$$

$F_1 \ll eE \to \frac{e^3\omega}{mc^3} \ll e \quad \frac{e^2\omega}{mc^3} \ll 1$, но $\lambda \sim \frac{c}{\omega}$

$\frac{e^2}{mc^2} \ll \lambda$ — условие $F_1 \ll F_{\lambda op.}$, расстояние $r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$ есть пр. применимости клас. эл.

$F_2 \ll eE \quad \frac{e^3H}{m^2c^4} \ll 1$. или $H \ll \frac{m^2c^4}{e^3}$

СГС: $m \sim 10^{-27}$ г, $c = 3\cdot10^{10}$ см/сек, $e \sim 4{,}8\cdot10^{-10}$ СГСЕ

$r_0 \sim \frac{e^2}{mc^2} \sim \frac{25\cdot10^{-20}}{10^{-27}\cdot 9\cdot10^{20}} \sim 10^{-13}$ см $\quad H \ll \frac{10^{-54}\cdot10^{42}}{125\cdot10^{-30}} \sim 10^{16}$

$c^2 \sim 10^{21}$ Длина волны и поле в той сист. где заряд в данный момент покоится

Мы говорили раньше, что конечность размеров излучателя и времени излучения даёт немонохромат, даже если его как-то получить, всё равно из-за радиационного затухания всегда есть конечная ширина линии. И это не единственный механизм уширения. (эффект Доплера и атомные столкновения — другие)

⊕ См. „спектр торможения" рентгеновских лучей, Бекнер стр. 70

при облучении кристаллов быстрыми электронами рождаются γ-кванты, причём экспер. исслед. их спектрального распределения показал, что кроме дискретного спектра есть и непрер. Дискретный связан с переходами между атомными уровнями, непрерывный — спектр излучения электронов, тормозящихся в твёрдом теле.

Виртуальные фотоны (Пановский, Фил. § 18.5 стр. 322)

Если $v \to c$ то излучение всё более похоже на плоские волны. Рассмотрим прерыв. быстрого эл-на ~~торможение~~. Полная ~~его~~ энергия этого излучения I

$$I = \int I_\omega d\omega, \quad I_\omega \text{ — спектральная плотность.}$$

С др. стороны, в квантовой теории каждой плоской волне соотв. фотон с энергией $\varepsilon_\omega = \hbar\omega$ и полная энергия частиц фотонов $I = \int \hbar\omega N_\omega d\omega$, где N_ω — число фотонов в интервале $\omega, \omega + d\omega$ (плотность состояний). Оказывается, что $N_\omega \sim 1/\omega$ и число фотонов на один эл-н $\sim 1/137$ — постоянной тонкой структуры. Покоящийся эл-н — это голый эл-н, одетый в облако ~~квант.~~ виртуальных фотонов, число которых $\sim 1/137$. Аналогично одевание [illegible] в веществе.

*) Торможение излучением и приводит к действию заряда самого на себя, содержит противоречия. Действит., пусть на заряд действ. только сила торможения, тогда $m\dot{v} = 2e^2\ddot{v}/3c^3$. Это ур-ние имеет прив. решение а) $v = const$ и б) $\dot{v} \sim \exp(3mc^3 t/2e^2)$ т.е. ускорение неограниченно $\to \infty$, заряд самоускоряется? Это есть ~~...~~ проявление бесконечной собственной энергии электрона при $R \to 0$ ($E \sim \frac{e^2}{R} \to \infty$) $m = \frac{E}{c^2} \to \infty$ $\frac{e^2}{r_0} = mc^2$

...то есть с обратным знаком интенсивность дипольного излуч... (42.5) т.о. силы третьего приближения описывают обратное влияние излучения на заряды и наз. тормозящими излучен. или лоренцевыми силами трения. Одновременно потерянной ...

Для одного излучающего электрона $\vec{F}=e\vec{E}$, $\vec{d}=e\vec{r}$

$$F = \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\vec{v}}$$

Рассмотрим движение электрона в поле упругих сил с учётом реакции излучения. Без учёта реакции

$m\ddot{x}=kx$ или $\ddot{x}+\omega_0^2 x=0$ – осциллятор $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$

С учётом реакции $\ddot{x}+\omega_0^2 x=\frac{2e^2}{3c^3 m}\dddot{x} \equiv \frac{2}{3}\tau_0\dddot{x}$ $\tau_0=\frac{e^2}{c^3 m}$

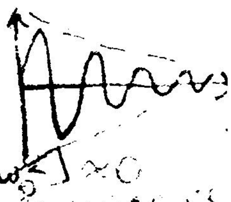
Реакция излучения д.б. малой, иначе мы не сможем описывать её влияние как малые поправки к движению без торможения, т.е. правая часть мала. Дифференц. раз

$\dddot{x}+\omega_0^2\dot{x}=\frac{2}{3}\tau_0\ddddot{x}$ и пренебрегаем $\ddddot{x}$, тогда $\dddot{x}\approx-\omega_0^2\dot{x}$

а уравнение движения $\ddot{x}+\gamma\dot{x}+\omega_0^2 x=0$, где $\gamma=\frac{2}{3}\tau_0\omega_0^2$

Такие уравнения решались в теорет. механике, известно

$x=Ae^{-i\omega_0 t}e^{-\gamma t/2}$ – амплитуда уменьшается



$\dot{x}=x(-i\omega_0-\gamma/2)$ $\ddot{x}=x(-i\omega_0-\gamma/2)^2=x(-\omega_0^2+i\omega_0\gamma+\gamma^2/4)$

$x[-\omega_0^2+i\omega_0\gamma+\gamma^2/4-i\omega_0\gamma-\gamma^2/2+\omega_0^2]\approx 0$ γ мало

Этот эффект часто называется радиационным затуханием

Энергия осциллятора $\sim x^2$ затухает как $e^{-\gamma t}$. Радиационное затухание также приводит к немонохроматичности волн.
γ^{-1} продолжительность излучённого импульса.

Без него Фурье-компонента поля есть $\delta(\omega-\omega_0)$ см. напр. $E=\int E_\omega$

где $I_\omega=I_0\delta(\omega-\omega_0)$. Теперь же $I_\omega=\frac{I_0\gamma}{2\pi}\frac{1}{(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2/4}$

$E_\omega=\frac{E_0}{2\pi}\frac{1}{i(\omega-\omega_0)-\frac{\gamma}{2}}$, $I_\omega\sim|E_\omega|^2$