

Показатель $\vec{H} = \frac{1}{c} \text{rot} \frac{\vec{J}}{R_0}, (\vec{E} = \text{rot} \text{rot} \frac{\vec{J}}{R_0})$

$E = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} = + \text{grad} \text{div} \frac{\vec{J}}{R_0} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{J}}{R_0}$

то мы уже знаем $\text{rot} \text{rot} \vec{a} = \text{grad} \text{div} \vec{a} - \Delta \vec{a}$

$\text{grad} \text{div} \frac{\vec{J}}{R_0} = \text{rot} \text{rot} \frac{\vec{J}}{R_0} + \Delta \frac{\vec{J}}{R_0}$ поэтому

$E = \text{rot} \text{rot} \frac{\vec{J}}{R_0} + \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{\vec{J}}{R_0}$

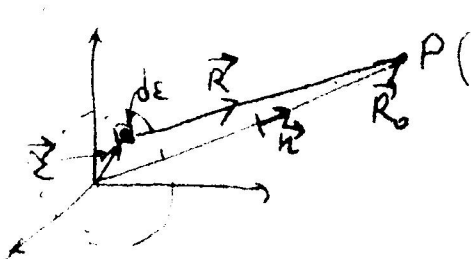
О т.к. $\vec{J}/R_0 = f(t - R_0/c)$ удов. волнов. уравнению

уравнению

В электродинамике условие Лоренца можно решить, если мы уже знаем $\vec{A}$, остается одно неизвестное φ . Но если и другое есть два неизвестных, с помощью вектора Грина сводим к одному вектору Z , которое подставляется в уравнение на неограниченном волновом уравнении, для Z , с помощью $\vec{A} = -\frac{1}{c} Z$ и $\varphi = \text{div} Z$ находим $\vec{A}$ и φ

Поле системы зарядов на больших расстояниях

Рассмотрим систему движущихся зарядов и найдём поле на расстояниях, больших по сравнению с размерами системы



$dQ = \rho dV$ — элемент заряда, его радиус-вектор $\vec{r}$, $\vec{R} = \vec{R}_0 - \vec{r}$

$|\vec{R}_0| \gg |\vec{r}|$, поэтому $|\vec{R}| = |\vec{R}_0 - \vec{r}| =$

$$= \sqrt{(\vec{R}_0 - \vec{r})(\vec{R}_0 - \vec{r})} = \sqrt{R_0^2 - 2\vec{R}_0 \cdot \vec{r} + r^2} \approx R_0 \sqrt{1 - \frac{2\vec{R}_0 \cdot \vec{r}}{R_0^2}} \approx R_0 \left(1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{R_0}\right) =$$

$R_0 - \vec{n} \cdot \vec{r}$. Поле определяется замещающими потен-
циалами (11.3) и (11.4),

$$\varphi(\vec{R}_0, t) = \int \frac{\rho(\vec{r}, t - R/c)}{R} d\vec{r} = \int \frac{\rho(\vec{r}, t - \frac{R_0}{c} + \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{c})}{R_0 - \vec{n} \cdot \vec{r}} d\vec{r} \approx$$

$$= \frac{1}{R_0} \int \rho(\vec{r}, t - \frac{R_0}{c} + \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{c}) d\vec{r}$$

т.к. $R_0 \gg r$
в интеграле можно пренебречь, т.е.
 $t - R_0/c$ и др. малы

Аналогично

$$\vec{A}(\vec{R}_0, t) = \frac{1}{c R_0} \int \vec{j}(\vec{r}, t - \frac{R_0}{c} + \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{c}) d\vec{r}$$

На достаточно больших расстояниях от системы и по сравнению с длиной волны любая волна в малых углах излучения преобразовывается как плоская. Эта область называется "волновой зоной" излучения



Больше нельзя сказать о поле ничего, пока мы не конкретизируем систему зарядов и её движение. Внесём, тогда можно пренебречь временем $\vec{n} \cdot \vec{r}/c$ в (1) и (2). Это можно делать тогда, когда распределение зарядов за это время мало меня-
 $\vec{n} \cdot \vec{r}/c$

Если распределение зарядов существенно меняется за время T , тогда частота излучения $\sim 1/T$ (в разумных условиях не меняются частоты $\Delta\omega \cdot \Delta t \sim 1$). Длина волны излучения $\lambda \sim \frac{c}{\omega} \sim cT$. Если a - размер системы, то $\frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{c} \sim \frac{a}{c} \ll T$ д.б.

Отсюда $a \ll cT$ или $a \ll \lambda$.

С другой стороны $T \sim \frac{a}{v}$, где v - скорость зарядов, т.е. $\lambda \sim c \frac{a}{v}$ и $a \ll c \frac{a}{v}$ означает $v \ll c$.

Итак, предполагая эти условия справедливыми, можем вывести поле. На расстояниях $R \gg \lambda \gg a$ (в волновой зоне) волна плоская. На основании (9.3), где плоской волне $\vec{H} = \vec{n} \times \vec{E}$ или $\vec{n} \times \vec{H} = \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{E}) = \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{E}) - \vec{E}(\vec{n} \cdot \vec{n}) = \vec{E}$ т.к. $\vec{n} \perp \vec{E}$

$\vec{E} = \vec{H} \times \vec{n}$. Поэтому достаточно найти $\vec{A}$, затем в плоской волне $\vec{H} = \dot{\vec{A}} \times \vec{n} / c$, затем $\vec{E} = \vec{H} \times \vec{n}$.

$$\vec{A} = \frac{1}{c\epsilon_0} \int \vec{j}(\vec{r}, t - R/c) d\vec{r}, \quad \vec{j} = \rho \vec{v}, \text{ поэтому}$$

$$\vec{A} = \frac{1}{c\epsilon_0} \left(\sum_i q_i \vec{v}_i \right), \text{ но } \sum e \vec{v} = \sum e \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{d}}, \text{ д - дипольный момент}$$

$$\text{итак, } \vec{A} = \frac{1}{c\epsilon_0} \dot{\vec{d}}, \quad \dot{\vec{A}} = \frac{1}{c\epsilon_0} \ddot{\vec{d}} \text{ и}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{c^2\epsilon_0} \ddot{\vec{d}} \times \vec{n}, \text{ а } \vec{E} = \frac{1}{c^2\epsilon_0} (\ddot{\vec{d}} \times \vec{n}) \times \vec{n} \quad (4)$$

излучение $\propto \ddot{\vec{d}}$, характеризующее дипольными. Т.к. $\vec{d} = \sum e \vec{r}$, то $\ddot{\vec{d}} = \sum e \ddot{\vec{r}}$.

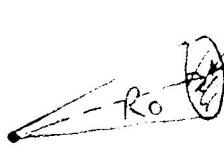
т.е. заряды излучают только если движение ускоренно. Равномерно движущийся заряд не излучает, действительно, преобразуем координат мы можем поместить его в систему отсчета, где он покоится, а покоящийся заряд не излучает.

Излучаемую энергию можно вычислить через вектор

Электрическое поле, которое дает масса волны

$$\vec{E} = \frac{e}{4\pi} H^2 \vec{n}$$

Интенсивность dI излучения в элемент телесного угла $d\Omega$

 $df = R_0^2 d\Omega$ есть количество энергии, проходящее в единицу времени через элемент df сферы радиуса R_0

$$dI = S \cdot df = \frac{e}{4\pi} H^2 R_0^2 d\Omega$$

т.е. φ и $A \sim 1/R_0$, то $H \sim 1/R_0$ и $H^2 R_0^2 \sim 1$ — порция излучения не зависит от расстояния и не исчезает

Для гармонического излучения $dI \sim \frac{e^2}{4\pi} \cdot \frac{1}{c^3} \left(\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} \right)^2 \cdot R_0^2 d\Omega$

$\vec{d} \times \vec{n} = \dot{\vec{x}} \sin \theta$, то

$$dI = \frac{1}{4\pi c^3} \dot{\vec{x}}^2 \sin^2 \theta d\Omega$$



$d\vec{x}$ — вектор

$$d\Omega = d\varphi \cdot \sin \theta d\theta$$

если проинтегрировать по $d\Omega$, найдем полную интенсивность

$$I = \int dI = \int d\varphi \frac{1}{4\pi c^3} \dot{\vec{x}}^2 \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{2\pi}{4\pi c^3} \dot{\vec{x}}^2 \int_0^\pi (1-x^2) dx =$$

$$\left. \sin \theta d\theta = d(\cos \theta + 1) \right|_{\cos \theta = x} = \frac{\dot{\vec{x}}^2}{2c^3} \cdot 2 \int_0^1 (1-x^2) dx = \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^3} \left(x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^3}$$

Итак,

$$(5) \quad I_{\text{дип.}} = \frac{2}{3} \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^3}$$

Если только один заряд движется ускоренно (во всем пространстве) то $\vec{J} = e\vec{v}$, $\dot{\vec{J}} = e\vec{w}$, где w — ускорение заряда, тогда

$$(6) \quad I = \frac{2}{3} \frac{e^2 w^2}{c^3}$$

но в пропорции квадратичном поле $\vec{E}$ заряд поворачивается эквивалентно движению заряда ускоренно. Их разницы нет.

1) Замкнутая система одинаковых частиц (вернее, с равным отношением e/m), не может двигаться:

$$\vec{P} = \sum e_i \vec{z}_i = \sum \frac{e_i}{m_i} m_i \vec{z}_i = \frac{e}{m} \sum m_i \vec{z}_i = \frac{e}{m} \vec{R}_0 \sum m_i,$$

где $\vec{R}_0$ - центр инерции, движущийся равномерно для замкнутой системы (нет внешних полей). Поэтому $\ddot{\vec{R}}_0 = 0$ и $\ddot{\vec{z}} = 0$.

Квадратное и магнитодипольное излучение

Пренебрегая членами $\vec{z} \cdot \vec{n} / c$ в (1) и (2), мы ограничиваемся малыми порожками по a/λ или v/c . Угнём теперь следующие члены разложения. Конечно, они малы по сравнению с дипольными, но будут важными, когда дипольный момент равен нулю или дипольное излучение отсутствует.

Снова исходим из $\vec{A} = \frac{1}{cR_0} \int \vec{j} \left(t - \frac{R_0}{c} + \frac{\vec{z} \cdot \vec{n}}{c} \right) d\vec{r}$ и разлагаем

$$\vec{A} = \frac{1}{cR_0} \int \left[\vec{j} \left(t - \frac{R_0}{c} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{z} \cdot \vec{n}}{c} \right) \right] d\vec{r} = \frac{1}{cR_0} \int \vec{j} d\vec{r} + \frac{1}{c^2 R_0} \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{j} (\vec{z} \cdot \vec{n}) d\vec{r}$$

1-й член мы уже знаем, это $A_{дип}$, во втором $\vec{j} = \rho \vec{v}$,

$$\vec{A} = \frac{1}{c^2 R_0} \frac{\partial}{\partial t} \sum e \vec{v} (\vec{z} \cdot \vec{n}).$$

$$\text{Здесь } \vec{v} (\vec{z} \cdot \vec{n}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \vec{z} (\vec{z} \cdot \vec{n}) + \frac{1}{2} \vec{v} (\vec{z} \cdot \vec{n}) - \frac{1}{2} \vec{z} (\vec{v} \cdot \vec{n}) \right\},$$

$$\vec{v} (\vec{n} \cdot \vec{z}) + \vec{z} (\vec{n} \cdot \vec{v}) = \vec{n} \times (\vec{v} \times \vec{z}) =$$

Здесь возник $\vec{M} = \frac{\sum e}{2c} \vec{r} \times \vec{v}$ - магнитный момент $= (\sum \vec{r} \times \vec{v}) \times \vec{n}$

$$\text{Итак, } \vec{A} = \frac{\dot{\vec{z}}}{cR_0} + \frac{1}{2c^2 R_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum e \vec{z} (\vec{n} \cdot \vec{z}) + \frac{1}{cR_0} \vec{M} \times \vec{n}$$

т.к. поле $\vec{H}$ и $\vec{E}$ определяются через векторное произведение с $\vec{A}$ то к $\vec{A}$ можно добавить любой вектор, $\parallel \vec{n}$, поле не изменится

Второй член $\frac{1}{6c^2 R_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum e \left[3\vec{z} (\vec{n} \cdot \vec{z}) - \vec{n} r^2 \right]$

где в скобках стоят выражение $D_{\alpha\beta} n_\beta$, где $D_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\dot{x}_\alpha \dot{x}_\beta - \dot{x}_\beta \dot{x}_\alpha) -$ квадратичный момент. Введем вектор $\vec{D}$, $D_\alpha = D_{\alpha\beta} n_\beta$, тогда

$$7) \quad \vec{A} = \frac{\vec{J}}{cR_0} + \frac{\vec{D}}{6cR_0} + \frac{\vec{M} \times \vec{n}}{cR_0}$$

или $d = \vec{A} \times \vec{n} = \frac{1}{c^2 R_0} \left\{ \vec{J} \times \vec{n} + \frac{1}{6c} \vec{D} \times \vec{n} + (\vec{M} \times \vec{n}) \times \vec{n} \right\}$

$$\vec{E} = \vec{n} \times \vec{d} = \vec{n} \times [(\vec{M} \times \vec{n}) \times \vec{n}] = \vec{n} \times [\vec{n} \times (\vec{M} \times \vec{n})] = \vec{n} [\vec{n} \cdot (\vec{M} \times \vec{n})] - \vec{M} \times \vec{n} (\vec{n} \cdot \vec{n}) = -\vec{M} \times \vec{n} = \vec{n} \times \vec{M}, \quad \text{так как}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{c^2 R_0} \left\{ (\vec{J} \times \vec{n}) \times \vec{n} + \frac{1}{6c} (\vec{D} \times \vec{n}) \times \vec{n} + \vec{n} \times \vec{M} \right\}$$

Полная интенсивность излучения есть

$$8) \quad I = \frac{2}{3c^3} \ddot{J}^2 + \frac{1}{180c^5} \ddot{D}_{\alpha\beta}^2 + \frac{2}{3c^3} \dot{M}^2$$

квадратичное магнито-дипольное
излучение излучение

по теореме 1.13. Поле излучения на больших расстояниях.

$a \ll \lambda \ll R$ по времени $\vec{A} = \vec{J}/cR_0$, но теперь будем считать плоскость и вращение для E и H излучения. Теперь у нас уже и скаляр. потенциал φ . Его можно найти из условия Лоренца $\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$. Для решения этого уравнения вводит вектор Гертца $\vec{Z} = -\frac{1}{R_0} \vec{J}(t - R/c)$, тогда

$$\vec{A} = -\frac{1}{c} \vec{Z}, \quad \text{подставим в условие Лоренца: } \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \vec{Z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

$$= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [\varphi - \text{div} \vec{Z}] = 0 \quad \text{откуда } \varphi = \text{div} \vec{Z} + f(t),$$

где $f(t)$ произвольная функция координат но не времени на излучении, ибо важна только перемена φ и $\vec{A}$ и $\vec{E}$ и $\vec{H}$ через $\vec{A}$ и φ