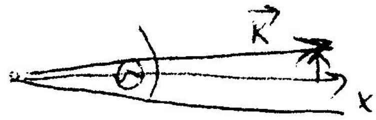
(*) стр 55 Если есть пучок света конечной ширины, то направление света не м.б. строго постоянным. Пусть x - средн. направление в пучке, θ_y – отклонение пучка



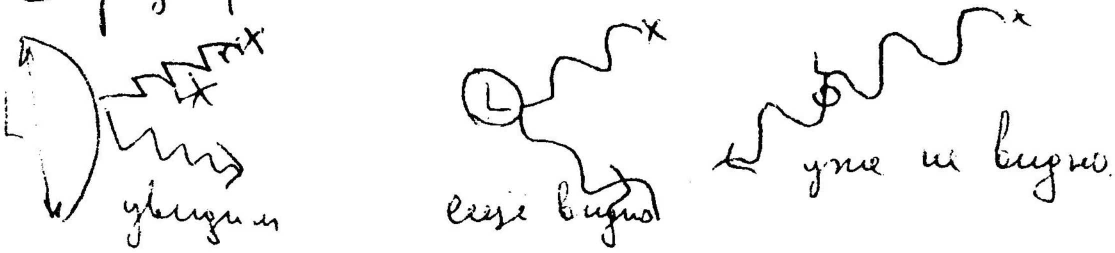
$$\Delta K_y = K\sin\theta = K\theta \gtrsim \frac{1}{\Delta y}, \quad \theta \sim \frac{1}{K\Delta y} \sim \frac{\lambda}{\Delta y}$$

Тогда при $\lambda \to 0$ $\theta_y \to 0$ – действительно бесконечно узк. луч. Т.к. каждый луч имеет некоторую ширину, то возникает ограничение резкости оптич. изображения или разрешающей способности прибора. Пусть θ - ширина пу[чка], тогда ширина ~~пятна~~ вместо точки при бескон. узких пу[чках] мы увидим пятно размером $\Delta \sim \lambda/\theta$

При $\lambda \to 0$ $\Delta \to 0$ – бесконечная резкость. Т.к. $\theta_{max} \sim 1$

то $\Delta_{min} \sim \lambda$

L размер тела



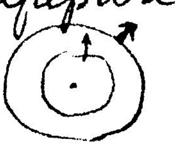
Распространение света

Для плоской волны амплитуда и $\vec{n}$ направление распространения света — постоянны. Для произвольной волны это не так. Однако, если амплитуда и направление мало меняются на малых расстояниях $\sim \lambda$ - длины волны, то можно считать волну локально-плоской и ввести понятие **волновой поверхности** (поверхность, в каждой точке которой фазы одинаковы в данный момент времени)

Для плоской волны

$e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$

Для сферической



$\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}$

В общем случае

Вектор распространения направлен по нормали

Линия, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением распространения волны, наз. лучом. Введя луч, мы перешли от волновых векторов к одномерным лучам.

$\vec{k}$ - импульс, ω - энергия, $k=\omega/c \Leftrightarrow p=\mathcal{E}/c$ с массой $m=0$.

Распространение электр. волн как лучей изучает геометрическая оптика. Для произвольной волны, чтобы $\vec{n}$ и амплитуда не менялись на λ нужно рассматривать предел $\lambda \to 0$, тогда геом. оптика справедлива для всех волн.

Для плоской монохроматической волны любое из полей $f = a e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t+\alpha)}$

Для произвольной $f = a e^{i\psi}$, причём $a(\vec{r},t)$, а фаза ψ, называемая также эйконалом м.б. сложной ф-цией $\vec{r},t$.

Мы знаем, что при изменении $\vec{r}+\lambda$ фаза меняется на 2π

т.е. $\psi(x+\lambda)-\psi(x)=2\pi = \frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\lambda$ или $\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{2\pi}{\lambda}$. т.к. x-любое, а $\lambda \to 0$

то ψ - большая величина

Поскольку $\psi(\vec r, t)$ — плавная функция, можно разложить

$$\psi(\vec r, t) = \psi_0 + \vec r\cdot\vec\nabla\psi + t\frac{\partial\psi}{\partial t}$$ Определим $\vec k = \vec\nabla\psi$, $\omega = -\frac{\partial\psi}{\partial t}$

Тогда $\psi = \psi_0 + \vec k\vec r - \omega t$ — также ~~как~~ и в плоской волне

однако теперь $\vec k$ и ω зависят от $\vec r, t$.

Можно ввести 4-х вектор $k_i = \frac{\partial\psi}{\partial x_i} = (\vec k, \frac{\omega}{c})$, тогда поле

$$f = a e^{-ik_i x^i}$$ $k_i k^i = \frac{\omega}{c}\cdot ct - \vec k\cdot\vec r = \omega t - \vec k\vec r$

~~и волнового уравнения $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0$~~ следует ~~мы видели,~~

что $k_i k^i = 0$

~~$\frac{\partial f}{\partial x_i} = +ik_i a e^{ik_i x_i} = ik_i f$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = (ik_i)^2 f = 0$~~ $\to$ ~~$k_i^2 = 0$~~

$k_i = -\frac{\partial\psi}{\partial x^i}$

$k^i = -\frac{\partial\psi}{\partial x_i}$

Отсюда получаем уравнение эйконала

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^i}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right) = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial x^i} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec\nabla\right) \qquad (1)$$

решив которое можно вычислить $\vec\nabla\psi$ — направление и $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ — частоту луча в данной точке.

Если волна имеет постоянную частоту ω, то временная зависимость поля $f \sim e^{-i\omega t}$, а эйконал имеет вид

$$\psi(\vec r, t) = -\omega t + \psi_0(\vec r)$$ $\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t} + \vec\nabla\psi\right)\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t} - \vec\nabla\psi\right) = 0$

$\frac{1}{c^2}\partial$

Подставим в (1): $$(\mathrm{grad}\,\psi_0)^2 - \left(\frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 = 0$$

или $$(\mathrm{grad}\,\psi_0)^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \qquad (2)$$

Волновые поверхности описываются уравнением $\psi_0 = \mathrm{const}$, а направление луча задаётся $\vec\nabla\psi_0$

Предел геометрической оптики

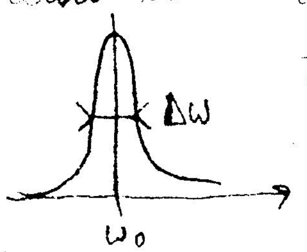
Монохроматическая волна не меняется от $-\infty$ до ∞ и есть идеализация, ~~обладает~~ реальная же волна может быть монохроматичной лишь приближённо. Выясним, что понимать под степенью немонохроматичности. Пусть амплитуда в каждой точке $\vec r$ есть функция времени, $f = f_0(t)e^{\ldots}$ мы можем разложить эту немон…

[х]роматическую волну на монохроматические компоненты (интеграл Фурье) $f = \int f_\omega e^{-i\omega t} d\omega$, где

$f_\omega = \int f_0(t) e^{i(\omega-\omega_0)t} dt$ если бы $f_0(t)$ было const.

то $f_\omega = f_0 \int e^{i(\omega-\omega_0)t} dt = f_0 \delta(\omega-\omega_0) = \begin{cases} 0, & \omega \neq \omega_0 \\ \sim (\omega-\omega_0)^{-1} \end{cases}$

Если f_0 зависит от времени, пусть Δt – интервал, на котором f_0 заметно меняется. Тогда δ-функция расплывается в характерной шириной $\Delta\omega$, причём $\Delta\omega \cdot \Delta t \sim 1$



$f(r,t) = f_0(r) e^{ikr}$

Аналогично если амплитуда меняется в пространстве на интервалах $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, то главный вклад в Фурье-разложение по $\vec{k}$ дают интервалы волновых векторов

т.е.) $\Delta k_x \Delta x \sim 1$, $\Delta k_y \Delta y \sim 1$, $\Delta k_z \Delta z \sim 1$, $\Delta \omega \Delta t \sim 1$

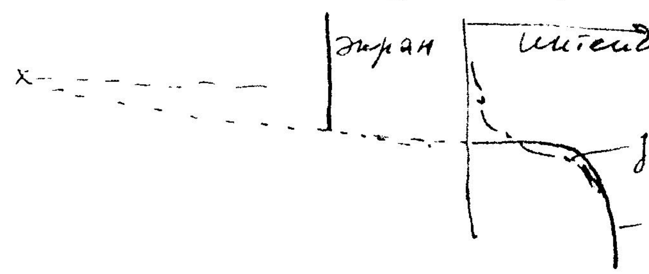
Эти соотношения позволяют оценить пределы геометр. оптики.

Пусть волна излучается неким излучателем за промежуток времени Δt, тогда степень немонохроматичности $\Delta\omega \gtrsim \frac{1}{\Delta t}$

Если размеры излучателя в каком-либо направлении Δx_i, то $\Delta k_i \gtrsim \frac{1}{\Delta x_i}$ $\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k}}$ $k = \frac{\omega}{c}$

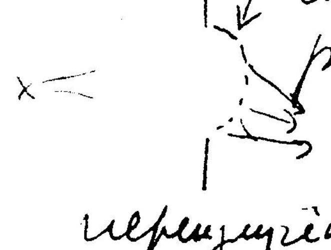
Отсюда вывод: ~~если мы хотим получить монохроматичные волны,~~ то должны излучать их ~~как можно~~ ~~быстрее и более протяжёнными~~ источниками. 2) ⊗

Чем хуже выполнено условие $\lambda \to 0$ применимости геометр. оптики, тем сильнее отклонения от неё. Явления, вызванные отклонениями ~~от~~ ~~прямолинейности~~ лучевого характера распространения волн, наз. дифракцией. Так, в пустоте лучи распространяются по прямой и если поставить на их пути экран, то получилась бы резкая граница между светом и тенью



возникает сложное распределение интенсивностей

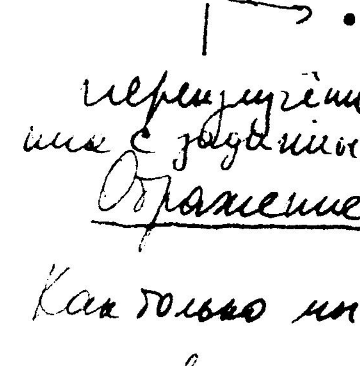
Расчёты распределения интенсивностей ведутся ~~...~~ на основе принципа Гюйгенса: $\boxed{\text{огибающая отверстие}}$



волновая поверхность каждая точка её рассматривается как вторичный излучатель и поле в произвольной точке P есть сумма таких переизлучённых полей. В общем случае надо решать волновое уравнение с заданными граничными и нач. условиями. Пример:

<u>Отражение и преломление на плоской границе</u> (Тамм, §

Как только мы рассматриваем волны в ограниченном пространстве, сразу необходимо задать граничные условия. Если волна проходит через границу из одной среды в другую, то таким условием является непрерывность тангенциальных составляющих. Итак, пусть волна падает вдоль направления с этим



образующего углы α, β, γ с осями x, y, z.

Падающую волну запишем в виде $\vec E = \vec E_0 e^{i(\vec k\vec R - \omega t)}$

Отражённую — $\vec E^r = E_0^r e^{i(\vec k_r \vec R - \omega_r t)}$

Преломлённую — $\vec E^d = \vec E_0^d e^{i(\vec k_d \vec R - \omega_d t)}$

это решения волнового ур-ния в весомой ср-

Полное поле выше плоскости $\vec E + \vec E^r$, ниже — $\vec E^d$, из условия непрерывности $E_t + E_t^r = E_t^d$. Это условие имеет вид $ae^{i\omega t} + be^{i\omega_r t} = ce^{i\omega_d t}$. Чтобы оно было справедливо в любой момент времени, требуется $\omega = \omega_r = \omega_d$. Чтобы доказать, продифференцируем по t:

$i\omega a e^{i\omega t} + i\omega_2 b e^{i\omega_2 t} = i\omega_g c e^{i\omega_g t} = \omega_g \left(a e^{i\omega t} + b e^{i\omega_2 t} \right)$

$(\omega - \omega_g) a e^{i\omega t} = (\omega_g - \omega_2) b e^{i\omega_2 t}$ отсюда $\omega = \omega_2$

С другой стороны, $b e^{i\omega_2 t} = c e^{i\omega_g t} - a e^{i\omega t}$, подставляя в ур-ние для производных, находим также что $\omega = \omega_g$. Итак, частота волны при преломлении и отражении не меняется.

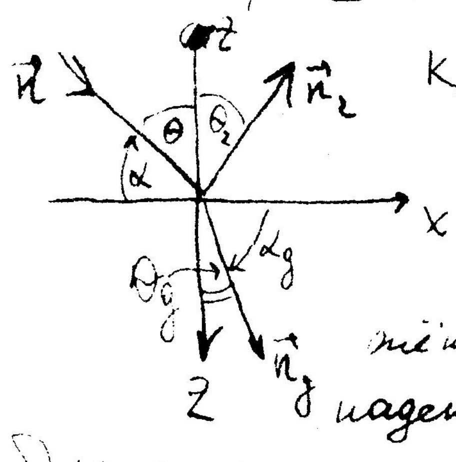
Аналогично доказывается, что

$\vec{k}\cdot\vec{R} = \vec{k}_2\cdot\vec{R} = \vec{k}_g\cdot\vec{R}$, где $\vec{R}$ – вектор лежащий в плоскости раздела (это и есть тангенциальная составляющая фазы). Если ось z перпендикулярна плоскости раздела, то $\vec{R} = (x, y, 0)$

$\vec{k}\cdot\vec{R} = k_x \cdot x + k_y \cdot y = k(x\cos\alpha + y\cos\beta)$, где α, β – углы $\vec{n}$ с x, y

$k(x\cos\alpha + y\cos\beta) = k_2(x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2) = k_g(x\cos\alpha_g + y\cos\beta_g)$

Выберем ось x так, чтобы луч падал в плоскости XZ, т.е. $\beta = \frac{\pi}{2}$, тогда



$kx\cos\alpha = k_2(x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2) = k_g(x\cos\alpha_g + y\cos\beta_g)$

это равенство при всех x, y, поэтому а) $\cos\beta_2 = \cos\beta_g = 0$, т.е. отражённый и преломлённый луч лежат в плоскости падения XZ

б) при x: $k_2\cos\alpha_2 = k_1\cos\alpha = k_g\cos\alpha_g$

Отношение $\frac{\omega}{k} = u_1$ – фазовая скорость $= \frac{\omega}{k_2}$; $\frac{\omega}{k_g} = u_2$

т.к. отраж. и падающие по одну сторону, то $k = k_2 \to \alpha_2 = \alpha$

$\frac{\omega}{u_1}\cos\alpha = \frac{\omega}{u_2}\cos\alpha_g$, $\cos\alpha = \sin\theta$, окончательно:

$$\begin{cases} \theta = \theta_2 & \text{– угол падения равен углу отражения} \\ \dfrac{\sin\theta}{\sin\theta_g} = \dfrac{u_1}{u_2} & \text{– закон Снеллиуса} \end{cases}$$

n – показатель преломления