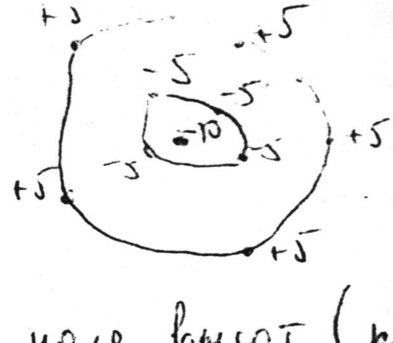
Электродинамика. Осенний семестр

Лекция 1 Поле и частицы в классической физике

Уравнения Лагранжа и Гамильтона для непрерывных систем (Б.М. гл. I)

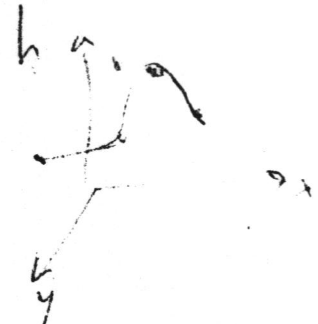
В классической механике объектами изучения являлись твердые тела — точечные или массивные. Существует другая физическая реальность — поле, которая изучается в теории поля. В то время как частицы характеризуются дискретным распределением своих характеристик (массы, заряда..) в пространстве, для полей характерно непрерывное распределение параметров во всем пространстве или какой-нибудь его части, ограниченной некоторыми условиями.

Примеры полей: а) поле температур $T(\vec{r})$ на плоск. $T(x,y)$

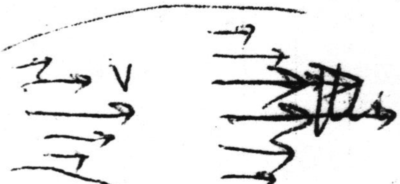


~~...~~ ~~линии~~ (изотермы)
(изолинии поля)

б) поле высот (рельеф) $h(x,y)$



в) поле скоростей, ~~...~~ жидкости
в каждой точке известна скорость $\vec{V}(\vec{r})$



Если один параметр распределён в пространстве то поле характеризуется скаляром $\eta(\vec{r},t)$, несколькими — вектором $\vec{\eta} = (\eta_1(\vec{r},t), \eta_2(\vec{r},t), \dots \eta_n(\vec{r},t))$. Соответственно, возможны скалярные и векторные поля. Вообще говоря, поле может изменяться со временем, тогда оно называется нестационарным...

... ~~механ.~~ тело характеризуется функцией Лагранжа - функцией ~~потенц.~~ (обобщённых) $q_i(t)$ и обобщённых скоростей $\dot{q}_i(t)$

$$L = L\{q_1(t), \ldots, q_n(t); \dot{q}_1(t), \ldots, \dot{q}_n(t); t\}$$

где n - число степеней свободы.

Уравнения ~~механ.~~ динамики получаются из принципа наименьшего действия, согласно которому

Истинное движение системы в промежутке от t_1 до t_2 соответствует такому виду функций $q_i(t)$, для которого действие

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t)\, dt$$

имеет при этом минимум (экстремум)

Вообще говоря, возможен и максимум S, но при очень специфических условиях (Л.Л. т. I)

Из условия $\delta S = 0$ получаем уравнение Лагранжа-Эйлера

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0 \quad , i = 1, 2, \ldots n. \qquad (1)$$

Переход от дискретной системы к непрерывной

Возьмём систему большого числа точек, равноудалённых друг от друга на расстояние Δx (одномерный случай)

Тогда

$$L = \sum_i \Delta x\, L_i\{\eta, \dot{\eta}, t\} \qquad \otimes \text{ стр 4}$$

Устремим число точек к ∞ так, чтобы $\Delta x \to 0$ тогда

$\Delta x \to dx$ ~~~~ $\sum \Delta x \to \int dx$, $\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{\Delta x} \to \frac{d\eta}{dx}$

где $L = \iiint \mathcal{L}\left\{\eta_s, \frac{\partial\eta_s}{\partial x}, \frac{\partial\eta_s}{\partial y}, \frac{\partial\eta_s}{\partial z}, \frac{\partial\eta_s}{\partial t}, x, y, z, t\right\}$, $s = 1, \dots n$ – конечное

где $\mathcal{L}$ – плотность функции Лагранжа или лагранжиан. Отличие от дискретного случая – $\mathcal{L}$ зависит не только от $\dot\eta$, но и от $\partial\eta/\partial x$ – здесь время и координаты выступают как равноправные параметры

$$S = \iiint_V \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\, d\vec{V} dt, \quad \delta S = 0 \text{ даёт } \boxed{\otimes\otimes} \text{ стр.}$$

уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\eta_s} + \sum_{k=1}^{3}\frac{d}{dx_k}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\eta_s}{\partial x_k}\right)}\right] - \frac{\partial L}{\partial\eta_s} = 0 \qquad S = 1, 2 \dots n$$

Введём вариационные производные:

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\eta} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta} - \sum_{k=1}^{3}\frac{d}{dx_k}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\eta}{\partial x_k}\right)}; \quad \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot\eta} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\eta}, \text{ тогда}$$

ур-ние (2) совпадает по форме с (1):

$$\frac{\delta L}{\delta\eta} - \frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta\dot\eta} = 0$$

метод Гамильтона

Вместо обобщённых координат η_i рассматриваются обобщённые координаты $\eta_i(t)$ и обобщённые импульсы

$$p_j = \frac{\partial L(\eta_i, \dot\eta_i, t)}{\partial\dot\eta_j}$$

Вводится функция Гамильтона $H(\eta_i, p_i, t) = \sum_{j=1}^{n} p_j\dot\eta_j - L(\eta_i$

имеем $2n$ – уравнений Гамильтона

$$\dot\eta_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot p_i = -\frac{\partial H}{\partial\eta_i}$$

Переход к непрерывным системам: $L=\sum_{i=1} \Delta x L_i$;

$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot\eta_i} = \Delta x \frac{\partial L_i}{\partial \dot\eta_i}$, поэтому функция Гамильтона имеет вид $H=\sum_i \Delta x \left\{\frac{\partial L_i}{\partial \dot\eta_i}\dot\eta_i - L_i\right\}$ после перехода $\Delta x \to 0$ $H \to \int dx \left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\eta}\dot\eta - \mathcal{L}\right\}$. Величина $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\eta} = \mathbf{p}$ называется удельным импульсом или плотностью импульса, а $\mathcal{H} = p\dot\eta - \mathcal{L}$ — гамильтонианом.

Уравнения Гамильтона для непрерывных систем

$$\dot\eta_s = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_s}, \quad \dot p_s = -\left\{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_s} - \sum_{i=1}^{3}\frac{d}{dx_i}\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial\left(\frac{\partial \eta_s}{\partial x_i}\right)}\right)\right\} \qquad (5)$$

после введения вариационных производных

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \eta_s} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_s} - \sum_{i=1}^{3}\frac{d}{dx_i}\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial\left(\frac{\partial \eta_s}{\partial x_i}\right)}\right); \quad \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta p_s} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_s}$$

(4) принимает форму:

$$\dot\eta_s = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta p_s}, \quad \dot p_s = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \eta_s}$$

Вывод: уравнения Лагранжа и Гамильтона остаются неизменными по виду при переходе от дискретных к непрерывным системам, но частные производные надо заменить в них вариационными.

На следующей лекции: повторить специальную теорию относительности.

Пример перехода от дискретной системы к непрерывной: рассмотрим [illegible]льные колебания одномерной системы — однородный упругий [illegible] длинный стержень, точки которого могут смещаться вдоль [illegible] [illegible] моделью такого стержня является система равно[illegible] [illegible] точек одинаковой массы Δm, связанных невесомыми [illegible] с коэфф. упругости k. Здесь $L=T-V$. Пусть $\eta_i(t)$ — смещен[illegible]

...ении у равновесия

Тогда $v_i = \dot{\eta}_i$ и $T_i = \frac{1}{2}\Delta m\,\dot{\eta}_i^2$, $T = \sum_i T_i = \frac{1}{2}\sum_i \Delta m\,\dot{\eta}_i^2$

Сила, действующая на i-ю точку, есть разность сил со соседних частиц

$F_i = K(\eta_{i+1}-\eta_i) - K(\eta_i - \eta_{i-1})$ и определяет потенциальную

энергию U: $F_i = -\frac{\partial U}{\partial \eta_i}$. Для этого достаточно взять

$U = \frac{1}{2}\sum_i K(\eta_{i+1}-\eta_i)^2$. Итак $L = \frac{1}{2}\sum_i \{\Delta m\,\dot{\eta}_i^2 - K(\eta_{i+1}-\eta_i)^2\} =$

$$= \frac{1}{2}\sum_i \Delta x\left\{\frac{\Delta m}{\Delta x}\dot{\eta}_i^2 - K\Delta x\left(\frac{\eta_{i+1}-\eta_i}{\Delta x}\right)^2\right\} = \sum_i \Delta x\, L_i$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2}\iiint_V \delta\mathcal{L}\left\{\eta, \frac{\partial\eta}{\partial t}, \frac{\partial\eta}{\partial x}, \frac{\partial\eta}{\partial y}, \frac{\partial\eta}{\partial z}, x, y, z, t\right\} dx\,dy\,dz\,dt = 0$$

где $\delta\mathcal{L} = \frac{\partial L}{\partial\eta}\delta\eta + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\eta}}\delta\dot{\eta} + \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\eta}{\partial x_k}\right)}\delta\left(\frac{\partial\eta}{\partial x_k}\right)$ Варьирование идет только по полевым функциям, $\vec{x}, t$ - задаются

Кроме того, на границе поля $\delta\eta = 0$ и в t_1 и t_2 $\delta\eta = 0$.

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\eta}}\delta\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)dt = \int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\eta}}\frac{d}{dt}(\delta\eta)\,dt \underset{\text{интегрируем}}{=} \underbrace{\cancel{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\eta}}\delta\eta}\Big|_{t_1}^{t_2}}_{0} - \int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\eta}}\right)\delta\eta\,dt$$

аналогично

$$\int\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\eta}{\partial x_k}\right)}\delta\left(\frac{\partial\eta}{\partial x_k}\right)dx_k = \int\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\eta}{\partial x_k}\right)}\frac{d}{dx_k}(\delta\eta)\,dx_k = \underbrace{\cancel{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\eta}{\partial x_k}\right)}\delta\eta}\Big|_{x_k^{(1)}}^{x_k^{(2)}}}_{0} - \int_{x_k^{(1)}}^{x_k^{(2)}}\frac{d}{dx_k}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\eta}{\partial x_k}\right)}\delta\eta\,dx_k$$

Итак $\delta S = 0 \Rightarrow$

$$\int_{t_1}^{t_2}\iiint_V \delta\eta\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\eta}} - \sum_{k=1}^{3}\frac{d}{dx_k}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\eta}{\partial x_k}\right)}\right)\right\}dx_1\,dx_2\,dx_3\,dt = 0$$

чтобы это было при любых $\delta\eta$ и $\vec{x}, t$, $\{\ldots\} = 0$.